Die Entwickelung des Unendlichkeitsbegriffs von Kant bis Cohen

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

vorgelegt

von

Joseph Bloch

aus Wilkowiszky

ACAD. LIBRARY BERL.

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juni 1907

Berlin

Druck von Carl Rosen

1907

163

Inhalt

Seite

Einleitung 5

I. Das Unendliche in der Kantischen Antinomieenlehre 8

II. Das Unendliche und die idealistischen Begriffskonstruktionen 12

III. Das Eindringen mathematischer Betrachtungsweise in die metaphysische Spekulation 23

IV. Die Entwickelung des mathematisch Unendlichen zum Transfiniten . . 36

V. Das Unendliche in seinem Verhältnis zur Ethik, Psychologie und Logik 51

Schlusswort 67

Literaturverzeichnis 69

Einleitung

Ein merkwürdiges Beginnen war es, dass man in die vollendete Klarheit der abstraktesten aller Wissenschaften, von der Nicolaus Cusanus das Wort prägte »nihil certi habemus nisi nostram mathematicam«, den verschwommenen Unendlichkeitsbegriff einführte und ihn sogar zur Grundlage einer neuen Rechnungsmethode machte. Der Vorwurf einer abstrusen Paradoxie, den man gegen diese Methode erheben konnte, ist durch die Erfolge der Anwendung des Infinitesimalen für die Praxis zunächst entkräftet worden. War die Richtigkeit der Ergebnisse auch nicht zu bestreiten, so war es doch bedenklich, dass sie aus einer Absurdität hergeleitet werden konnten: ein Bedenken, das sich noch steigerte, als die Sicherheit des Weges auch in der Mathematik in Frage gestellt zu sein schien. So ist denn die Entwickelungsgeschichte des Unendlichkeitsbegriffs aufs engste verknüpft mit der Entwickelung unseres Denkens überhaupt. Das Rätsel, das dieser Begriff dem Denken bot, und dessen Lösung Leibniz und Newton ihm dringlich gemacht hatten, hat bei den folgenden Philosophen verschiedene Gestalt angenommen, und wir sehen eine Entwickelungslinie, die sich bis in unsere Tage zieht. Das vorläufig letzte Wort in der Erledigung dieses Problems hat Hermann Cohen gesprochen, indem er den Infinitesimalbegriff als den Grundzug unseres wissenschaftlichen Denkens erkannte und die Logik als Logik des Ursprungs sicher zu fundieren trachtete. Wenn auch jenes System, das die mathematische Methode mit der Philosophie innerlich zu verbinden versucht hat, von seiten der Friesschen Schule eine energische Zurückweisung erfahren hat, so hat doch die Marburger Schule einen solchen Umfang angenommen, dass die Logik des Ursprungs zum mindesten als eine neue und wichtige Etappe bezeichnet werden muss, an der eine philosophiegeschichtliche Betrachtung nicht vorübergehen darf, und die einen Rückblick, wie auch einen Ausblick gestattet.

Die Entwickelung des Unendlichkeitsbegriffs scheint die Ansicht zu festigen, dass, wie die Mathematik erst aus ihm vorher unbekannte Möglichkeiten zur Bewältigung ihrer schwierigen Aufgaben und der Aufgaben der Naturwissenschaft sich erschloss, so auch jedes andere Forschungsgebiet durch ihn erhellt werden könnte. Es könnte die Befürchtung ausgesprochen werden, jene neuerliche Verflechtung von Mathematik und Philosophie sei das Zurücksinken in den alten Fehler, an dem das pythagoräische Weltsystem zu grunde ging, und der auch dem spinozistischen System anhaftet. Indes, der Begriff des Unendlichen ist an sich keineswegs ein Besitztum der Mathematik gewesen. Seine wissenschaftliche

Begründung wurde erst durch Leibniz und Newton in der Mathematik durchgeführt. Dadurch wurde der Begriff selber aber noch kein Privileg der Mathematik, diese musste ihn vielmehr stets mit anderen Wissensgebieten teilen. Und gerade der Philosophie kam es in erster Linie zu, den Begriff zu durchdringen. Es soll nun in dieser Arbeit untersucht werden, inwieweit sie jener Aufgabe bis jetzt genügt hat.

Dass wir den Zeitraum für diese Betrachtung gerade mit der kritischen Periode Kants beginnen lassen, hat seinen Grund darin, dass der Unendlichkeitsbegriff erst bei Kant sich von jenen verwirrenden Elementen zu befreien beginnt, die in den früheren Zeiten seiner exakten Ausprägung im Wege standen. Das sonst philosophisch so fruchtbare Griechentum war in seinem plastisch veranlagten Geist hierzu ganz und gar nicht geeignet. Die Ausläufer jener klassischen Periode, dann in späterer Zeit die jüdischen und arabischen Philosophen und endlich das eingeengte und zum Teil gefesselte Erkenntnisstreben des Mittehaltens waren zu sehr im Mystizismus und im religiösen Spintisieren befangen, als dass man bei ihnen auch nur den Anfang einer klaren Einsicht in das Infinitesimale finden könnte. Das Unendliche wurde mehr oder weniger mit der Gottheit identifiziert, und damit war über den ganzen Begriff Dunkelheit gebreitet. Nur ein Philosoph am Ausgange jener Zeit, der aber erst in unseren Tagen die gebührende Anerkennung gefunden hat, und der erst jetzt als der Reformator der Philosophie gewürdigt wird, geht einen andern Weg, der dann in ununterbrochener Folge auf das Denken unserer Zeit führt. Nicolaus von Kues ist es, den man als den Pionier des modernen Infinitesimalbegriffs betrachten kann. Seine Worte »esse initiatum post non esse« zeigen in die modernen Gedankengänge. Freilich ist es nur eine Ahnung, und noch kein klares Erkennen; denn dieser Gedanke ist bereits, bevor er ausgesprochen, getrübt durch die vorangehenden Worte »esse aeternum ante non esse«.[1])

Dass das Streben nach einer exakten Formulierung des Begriffes von jeher in hohem Masse vorhanden war, hat J. Cohn in seinem trefflichen Werke über die Geschichte des Unendlichkeitsproblems zur Genüge gezeigt.[2]) Den Konzentrationspunkt in dieser ganzen Frage bildet die Kantische Antinomieenlehre, in der zum erstenmal der wahre Tatbestand festgestellt wurde. Und wenn auch durch diesen Konzentrationspunkt hindurch die Frage mitunter zu einer fast noch grösseren unkritischen Breite anschwoll, als man sie vorher gesehen, so musste der wissenschaftliche Denker doch stets *nolens volens* zu den Kantischen Resultaten Stellung nehmen; Cohn sagt mit Recht: »Alle folgenden Versuche haben hier an Kant angeknüpft, ihn bekämpft oder verteidigt, umgestürzt oder ausgebaut.«[3]) Das grose Verdienst, das Kant sich um das Unendlichkeitsproblem erworben, besteht, wie Cohn sich ausdrückt, in der systematisch

[1]) Vide Richard Falckenberg: *Grundzüge der Philosophie des Nicolaus Cusanus* (Breslau 1880), pag. 30 u. a.

[2]) Vide Jonas Cohn: *Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant* (Leipzig 1896).

[3]) Vide Cohn, loc. cit., pag. 231.

durchgebildeten »Ausmessung seiner theoretischen Bedeutung«, und es gibt schwerlich ein nachkritisches systematisch-philosophisches Werk, in dem jener Frage nicht ein mehr oder weniger breiter Platz gewährt worden ist. Eine erschöpfende Geschichte des nachkantischen Unendlichkeitsproblems würde ein überaus umfangreiches Werk ergeben. Ein derartiger Zweck soll auch mit dieser kleinen Arbeit gar nicht erfüllt werden. Sie will nicht etwa eine Fortsetzung des ganz anders angelegten, gründlichen Buches J. Cohns sein. Vielmehr sagt schon unser Thema, dass es sich hier lediglich um die Entwickelung des Begriffes handelt, dass also jedes nichts Neues bringende Für und Wider bei einem Problem, in dem nur verhältnismässig beschränkte Möglichkeiten in Betracht kommen, füglich übergangen werden kann. Nur die Spuren gilt es hier nachzuweisen, die der Unendlichkeitsbegriff in der umfangreichen philosophischen Literatur gezeichnet hat.

Von Kant bis Cohen. Dieser Abschnitt ist hier keineswegs unmotiviert. Von Kant wird der Begriff in seiner Unbedingtheit beseitigt: aus einem konstitutiven Prinzip des Erfassens wird ein regulatives des Fortschreitens. Bei seinen Nachfolgern verschieben sich die Gesichtspunkte. Die Bahn, die die Antinomieenlehre wies, wird verlassen. Der Begriff wird in seltsamen Wandlungen, die zu Gegensätzen führen, bald metaphysischer Spekulation, bald exakter Betrachtung unterworfen. Und in unseren Tagen wird er einer reinen Erkenntnistheorie zu grunde gelegt, die ebenso begeisterte Anhänger, wie scharfe Gegner findet. Die Begrenzung des Themas verlangt in Hinsicht auf den überaus ergiebigen Stoff ein strenges Einhalten der in Frage kommenden Aufgabe, die nur in der Darstellung der Entwickelung des Begriffes des unendlich Kleinen und unendlich Grossen bestehen soll. So nahe also unserem Gedankengange auch das Problem der Kontinuität, der unendlichen Teilung liegen möge, so kann es nur gelegentlich oberflächlich gestreift werden; wir würden andernfalls im dritten, wie im vierten Abschnitt genötigt sein, in längeren Ausführungen auf die mannigfaltigen Ansichten über das Irrationale einzugehen, was ein völliges Abweichen vom Thema mit sich bringen würde.

ERSTER ABSCHNITT

Das Unendliche in der Kantischen Antinomieenlehre

Das Unendliche erfährt bei Kant zum erstenmal eine durchaus methodische Behandlung, und die transzendentale Idealität von Raum und Zeit ist der Schlüssel zu jenem grossen Rätsel, das die kosmologischen Ideen den Dogmatikern und Empirikern aufgegeben hatten. Die kontradiktorisch entgegengesetzten Resultate, zu denen jene beiden über das Unbedingte meditierenden Klassen von Philosophen gelangten, die Fragen nach der räumlichen und zeitlichen Begrenztheit der Welt, nach der Existenz einfacher Teile in einem Zusammengesetzten, nach der Freiheit des Handelns, werden von Kant in der Antithetik der reinen Vernunft auf ihre Stichhaltigkeit hin untersucht, und es stellt sich heraus, dass die beiden ersten Fragen (Ist die Welt der Zeit und dem Raume nach begrenzt oder unendlich? Besteht alles in der Welt aus Einfachem, oder ist alles zusammengesetzt?) in der gegebenen Fassung eine Absurdität bedeuten, da von einer Grösse der Welt gar nicht gesprochen werden darf. Sofern nämlich die Welt in dem Bann der Formen unserer Anschauung steht, steht sie gleichzeitig im Bann eines fortschreitenden Progresses, dessen völliger Abschluss nicht auszudenken ist. »Niemals ist«, wie J. Cohn in seiner Geschichte des Unendlichkeitsproblems bei der Besprechung der Antinomieenlehre sagt, »ein Recht vorhanden, anstatt dieser Möglichkeit des Fortgangs eine abgeschlossene Totalität einzusetzen. Denn eine solche abgeschlossene Totalität hat nur Sinn für ein an sich seiendes Ding, nicht für eine Erscheinung, in der jeder Abschluss nur ein relativer ist.« Der einzige Wert, den die beiden ersten Fragen besitzen, besteht in einer ständigen Aufforderung zu unaufhörlichem Erkenntnisstreben. »Der Grundsatz der Vernunft also ist eigentlich nur eine Regel, welche in der Reihe der Bedingungen gegebener Erscheinungen einen Regressus gebietet, dem es niemals erlaubt ist, bei einem Schlechthinunbedingten stehen zu bleiben.«[4])

Der transzendentale Begriff der Unendlichkeit, der darin besteht, »dass die successive Synthesis der Einheit in Durchmessung eines Quanti niemals vollendet sein kann«, zerfällt gelegentlich der Auflösung der ersten Antinomie in zwei Klassen. »Wenn das Ganze in der empi-

[4]) Vide Immanuel Kant: *Kritik der reinen Vernunft,* Reclam-Ausgabe, pag. 413.

rischen Anschauung gegeben worden, so geht der Regressus in der Reihe seiner inneren Bedingungen ins Unendliche; ist aber nur ein Glied der Reihe gegeben, von welchem der Regressus zur absoluten Totalität allererst fortgehen soll: so findet nur ein Rückgang in unbestimmte Weite (*in indefinitum*) statt. So muss von der Teilung einer zwischen ihren Grenzen gegebenen Materie (eines Körpers) gesagt werden: sie gehe ins Unendliche.«[5])

Der Unterschied in dem unendlichen Progress der Synthesis beruht auf der Verschiedenheit der Richtung, in der sich die Synthesis von dem in der Anschauung gegebenen Ganzen aus bewegen soll. »Wenn das Ganze empirisch gegeben worden, so ist es möglich, ins Unendliche in der Reihe seiner inneren Bedingungen zurückzugehen. Ist jenes aber nicht gegeben, sondern soll durch empirischen Regressus allererst gegeben werden, so kann ich nur sagen: es ist ins Unendliche möglich zu noch höheren Bedingungen der Reihe fortzugehen. Im ersteren Falle konnte ich sagen: es sind immer mehr Glieder da und empirisch gegeben, als ich durch den Regressus (der Dekomposition) erreiche; im zweiten aber: ich kann im Regressus noch immer weiter gehen, weil kein Glied als schlechthin unbedingt empirisch gegeben ist und also noch immer ein höheres Glied als möglich und mithin die Nachfrage nach demselben als notwendig zulässt.«[6]) Das Gegebene kann also seiner Natur nach beide Male das selbe sein. Es handelt sich nur darum, in welcher Eigenschaft es gegeben ist. Im ersten Fall sehen wir es als Totalität an, im zweiten als Einheit, je nachdem sich die Richtung der Synthesis nach aussen oder innen betätigen soll.

Das indefinite Gegebene erscheint somit nur als »ein Glied der Reihe«. Auf diese Weise soll der transzendentale Idealismus über das Dilemma des Unendlichen forthelfen. Die Reihe der Bedingungen ist lediglich in der Erscheinung gegeben. Das Ding an sich selbst, das Noumenon, kann niemals Gegenstand unserer Sinne sein, »ist also bloss ein Grenzbegriff, um die Anmassung der Sinnlichkeit einzuschränken«.[7]) Als das der Erscheinung zu grunde Liegende kann es ausser dieser nichts Selbständiges vertreten. Es ist das Verstandesding. So sind im Grunde nur die Bedingungen für einen Regressus gegeben; sie sollen bestimmen, an welche Regel wir uns bei der Vollziehung des Regressus zu halten haben. Diese Regel hängt ganz davon ab, ob der erkennende Fortgang dem Zuge der inneren Bedingungen folgen soll, oder ob die Totalität das Ideal unseres Strebens ist. Wir überschreiten dann successive jede empirische Gegebenheit, infolge der Möglichkeit, zu noch immer höheren Gliedern zu gelangen. Anschaulichkeit und Begrifflichkeit vermögen die Grösse der Welt nicht in ihrem Bezirk zu fassen. So ist es ein Fehler, von der räumlichen oder zeitlichen Unendlichkeit der Gesamtheit unserer Sinnenwelt zu sprechen. »Denn dergleichen Begriff von Grösse, als einer

---

[5]) Vide Kant, loc. cit., pag. 415 ff.
[6]) Vide Kant, loc. cit., pag. 416 ff.
[7]) Vide Kant, loc. cit., pag. 235.

gegebenen Unendlichkeit, ist empirisch, mithin auch in Ansehung der Welt, als eines Gegenstandes der Sinne, schlechterdings unmöglich.«[8])

Der Begriff der Unendlichkeit, der in der transzendentalen Ästhetik insofern also seine Zurechtweisung empfangen hat, als der Raum als die Form unserer äusseren Sinne nachgewiesen war, wird in den metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft einer weiteren Betrachtung unterzogen. Das Wesentliche zu einer Raumerfüllung ist für Kant die Repulsion. Ohne diese hätten wir es nur mit einer geometrischen Raumbegrenzung, nicht aber mit einem materiellem Körper zu tun. Diese repulsiven Kräfte müssen stets einen endlichen Grad haben, sie dürfen die Grösse einer endlichen Stärke nach keiner Seite hin überschreiten. Wären sie unendlich gross, also von grenzenloser Stärke, so würden sie »in einer endlichen Zeit einen unendlichen Raum erfüllen«. Im entgegengesetzten Falle würden sie ihrer Aufgabe, den Raum zu erfüllen, überhaupt nicht gerecht werden können. Das selbe gilt von der zusammendrückenden Kraft, jener eigentümlichen Hypostase, zu deren Aufstellung sich Kant infolge dieser Repulsionstheorie gezwungen sah. Sie entsteht durch die Einwirkung zweier endlichen, dem Grade nach verschiedenen repulsiven Kräfte, und dabei geschieht es, »dass sie die Raumerfüllung des Körpers einschränken, dass sie, mit einem Wort, die Materie zusammendrücken«. Wären diese zusammendrückenden Kräfte unendlich gross, während sie auf eine andere, endliche Kraft stossen, so würden sie die Raumerfüllung der angegriffenen Materie ganz aufheben, das heisst die Materie in leeren Raum verwandeln. Hier weist Kant also die Unmöglichkeit des Vorhandenseins einer unendlichen Kraft nach. Ist dieser Beweis tatsächlich hinreichend? Wäre es nicht denkbar, dass bei Ausschaltung aller endlichen Kräfte nur Kräfte von unbeschränkter Intensität auf einander wirken? In diesem Falle könnte das Verhältnis unter ihnen das selbe sein, wie unter endlichen, und der Körper, das heisst die Raumerfüllung, wäre in seiner Realität durchaus gewahrt. Das Verhältnis zweier Kräfte zu einander kann nie und nimmer Aufschluss über ihre eigentliche Natur geben.

Die Materie als eine blosse Erscheinung unserer äusseren Sinne ist nach Kant ins Unendliche teilbar. Denn die Materie ist kein Ding an sich selbst, sie hat mit dem Raum als einer blossen Vorstellung auch die Eigenschaft einer unendlichen Teilbarkeit gemein. Auch die Teilbarkeit hat den Charakter einer blossen Vorstellung. Die Vorstellung einer unendlichen Teilbarkeit ist nicht mit der Realität eines unendlichen Geteiltseins zu verwechseln. »Die Teilung kann in Gedanken ins Unendliche fortgesetzt werden. Das heisst nicht: es sind unendlich viele Teile unabhängig von unserer Vorstellung gegeben.«[9]) Die Totalität der Welt bleibt für Kant dauernd ausserhalb unserer Erfahrung, deren Abschluss wir ebenfalls durch keine progressive Synthesis jemals werden erreichen können. Die Antinomieen sind als Lehrsätze ungültig gemacht,

[8]) Vide Kant, loc. cit., pag. 420.

[9]) Vide Kuno Fischer: *Kant*, 5. Bd. der *Geschichte der neueren Philosophie* (Heidelberg 1897-1903), 2. Teil, pag. 171.

und ihr Wert besteht lediglich in ihrer regulativen Leitung des Denkens, stets das System der gesamten Erfahrung im Fortgange der Erkenntnis im Auge zu haben. Raum und Zeit sind lediglich Vorstellungsarten, deshalb ist es offenbar widersprechend, »zu sagen, dass eine blosse Vorstellungsart auch ausser unserer Vorstellung existiere. Die Gegenstände also der Sinne existieren nur in der Erfahrung; dagegen auch ohne dieselbe, oder vor ihr, ihnen eine eigene für sich bestehende Existenz zu geben, heisst so viel, als sich vorstellen, Erfahrung sei auch ohne Erfahrung oder vor derselben wirklich.«[10]) Wie aber kann von einem unendlichen Raum Erfahrung möglich sein? »Das sind nur Ideen.«[11]) Der naive Naturalismus, der den gegebenen Inhalt der Erscheinungswelt für »Sachen an sich selbst« nimmt, kann das Gebäude seiner metaphysischen Begriffskonstruktion auf einer der beiden entgegengesetzten Grundlagen bis ins Unermessliche errichten, wenn er nur nicht in unrechtes Gebiet gerät, sich selbst getreu bleibt, sich also niemals widerspricht. Derartige synthetische Sätze sind, wie die Metamathematik zur Genüge zeigt, obwohl sie auf fingierten Fundamenten ruhen, niemals aus der Erfahrung heraus zu widerlegen, mit der sie gar nichts gemein haben. »Denn wie wollten wir es durch Erfahrung ausmachen: ob die Welt von Ewigkeit her sei oder einen Anfang habe, ob Materie ins Unendliche teilbar sei oder aus einfachen Teilen bestehe, dergleichen Begriffe lassen sich in keiner, auch der grösstmöglichen Erfahrung geben, mithin die Unrichtigkeit des behauptenden oder verneinenden Satzes durch diesen Probierstein nicht entdecken.«[12])

Von einer positiven Unendlichkeit des Raumes oder der Zeit darf also nicht gesprochen werden; nur der in den Kategorieen unseres Denkens stattfindende Zusammenschluss der ungemessenen Auslösungen eines eventuell an sich existierenden transzendenten Dinges, über das wir uns keinen bestimmten Begriff geben können, führt in unserer Erfahrung uns zu dem negativen Begriff eines unbegrenzten Fortgangs.

Räumlichkeit, Zeitlichkeit und kausale Bedingtheit involvieren vom naturalistischen Standpunkt aus schlechterdings jene seltsamen Widersprüche des Unendlichen; der Transzendentalphilosoph, der hinsichtlich der Welt »keinen ersten Anfang der Zeit und keine äusserste Grenze dem Raume nach« kennt,[13]) vielmehr nur die Regel für einen empirischen Regressus, »von einem jeden Gliede der Reihe, als einem Bedingten, jederzeit zu einem entferntern fortzuschreiten«, löst das Rätsel mit einem Appell an den wissenschaftlichen Optimismus, wodurch, wie H. Cornelius bemerkt, der transzendentale Idealismus mit dem reinen Empirismus verschmilzt.

---

[10]) Vide Kant: *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*, Reclam-Ausgabe, pag. 127.
[11]) Vide Kant, loc. cit., pag. 127.
[12]) Vide Kant, loc. cit., pag 125.
[13]) Vide Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, pag. 421.

ZWEITER ABSCHNITT

Das Unendliche und die idealistischen Begriffskonstruktionen

1

Kant hat aus dem Nebel eines rätselhaften Begriffs heraus über die Anlage unseres Erkenntnisvermögens bestimmte Schlüsse gezogen. Der Begriff selber aber hat — das wird man zugeben müssen — durch die Wendung ins Transzendentale eine sonderliche Klärung nicht erfahren. Ob eine solche Klärung sich nun überhaupt erreichen lässt oder nicht, das könnte nur eine kritische Untersuchung des Wesens dieses Unendlichen ergeben; der Unendlichkeitsbegriff wird aber, wie G. Cantor sich ausdrückt, von Kant »ohne ernste kritische Vorerörterung« benutzt[14]). Das Ergebnis der Aufstellung der Kantischen Antinomieen liess daher viele der Späteren unbefriedigt. Und die Mehrzahl der bedeutenderen Nachfolger Kants hat wieder das weite Gebiet der Metaphysik, das kurze Zeit verlassen war, mit neuen Begriffskonstruktionen erfüllt.

Die Entwickelung, die der Unendlichkeitsbegriff in der nachkantischen Epoche nimmt — sofern wir auch sein rapides Sinken aus dem erkenntnistheoretischen in das mystische Gebiet der Idealisten im negativen Sinne eine Entwickelung nennen dürfen —, ist zunächst in der Wissenschaftslehre J. G. Fichtes zu suchen. Von kleineren Intervallen, deren Schilderung den Gesamteindruck nicht verstärken würde, sehen wir ab.

Das Ding an sich, das einen so heissen Kampf um seine Existenz bei den Nachfolgern Kants hatte entbrennen lassen, ist nach Fichtes Meinung von Kant niemals in dem Sinn eines ausserhalb unseres Vorstellungsvermögens gegebenen und auf unsere Empfindung einwirkenden Agens gedacht worden. Die einzig wahre Tatsache ist die des eigenen Setzens, des unendlichen Ichs. Die Tatsache ist die Tathandlung, die sich in der Seinssetzung des Ichs vollzieht. Ins Unendliche gehende Tätigkeit ist die grundsätzliche Charakteristik des Ichs; es begrenzt sich nur selbst, um seine Tätigkeit ausüben zu können. »Insofern das Ich sich ein Nichtich entgegensetzt, setzt es notwendig Schranken und sich selbst in diese Schranken.«[15]) Das Ich ist unendlich: seine Tätigkeit wird in sich zurückreflektiert. Eine objektlose, in sich zurückreflektie-

[14]) Vide G. Cantor: *Zur Lehre vom Transfiniten* (Halle 1890), pag. 8.

[15]) Vide Johann Gottlieb Fichte: *Grundlage der gesamten Wissenschaftslehre* (Tübingen 1802), pag. 233.

rende Tätigkeit ist die reine, die bewusstlose, weil unbegrenzte; denn jedes Bewusstwerden verlangt nach Schranken zur Begriffsbildung. »Das Ich ist endlich, weil es begrenzt sein soll; aber es ist in dieser Endlichkeit unendlich, weil die Grenze ins Unendliche immer weiter hinausgesetzt werden kann. Es ist seiner Endlichkeit nach unendlich und seiner Unendlichkeit nach endlich.«[16]) Damit scheint der Begriff auf dem alten Cusanischen Standpunkt einer kontrahierten Unendlichkeit angelangt. Er bewegt sich gleichzeitig im Gebiet des wirklich, das heisst aktual Unendlichen und überträgt sich in dieser seiner Eigenschaft auch auf den Umfang der Wissenschaftslehre.

Das Streben Fichtes geht in seiner Wissenschaftslehre dahin, alle Erfahrung zu einem einheitlichen Lehrgebäude zu vereinigen, dergestalt, dass die Unendlichkeit fortwährend auftauchender absolut neuer Erkenntnisse vereitelt wird. Die Endlosigkeit der Erkenntnisreihe wird bestritten, und zur Grundlage aller Wissenschaft soll ein Satz gemacht werden, der jene scheinbare Endlosigkeit im Keime enthält. So stellt sich Fichte die Aufgabe, über die Totalität mit Hilfe eines Satzes Herr zu werden, der unser Wissen in notwendiger, hinreichender, aber es nicht überragender Weise enthält, der in seiner Komplikation mit unseren Erkenntnissen durchaus zur Deckung gebracht werden kann. Der Begriff einer solchen eingeschränkten Unendlichkeit unseres Wissens wäre unerreichbar, wenn die aus ihm abgeleiteten scheinbar letzten Resultate nicht wieder in seine unentwickelten Anfänge zurückfielen. »Wenn das System völlig geschlossen ist, so hat es keine Lücke, so ist in ihm kein Satz zu wenig. Es ist völlig geschlossen, wenn es einen Kreislauf beschreibt, so dass am Ende sich der Grundsatz selbst als letztes Resultat ergibt, und das System auf diese Weise in seinen Anfang zurückkehrt.«[17])

Die Begriffe des endlichen Unendlichen und des unendlichen Endlichen stellen, mag die Zubilligung einer aktualen Unendlichkeit immerhin zu ihnen führen, ein so abstruses Gebiet in dem weiten Felde der Paradoxieen dar, in dem sich die Wandlungen unseres Begriffs vollziehen, dass selbst Fichte, sobald es sich um mehr praktische Fragen handelt, ihnen untreu wird. Es stellt sich für ihn zum Beispiel als eine Unmöglichkeit heraus, jemals als Resultat einer unendlichen Teilung der Seiten eines Polygons tatsächlich die Kreisperipherie zu erhalten: »Ich habe es, als ich noch in Sekunda sass, gar wohl vernommen, dass die Peripherie gleich sein soll einem Polygon von unendlich vielen Seiten, und dass man den Flächeninhalt des ersteren bekommen soll, wenn man den des letzteren hat. Aber ich habe die Möglichkeit dieser Ausmessungen nie begreifen können und hoffe zu Gott, dass er bis an mein Ende mich sie nicht werde begreifen lassen.«[18]) Fichte spricht hier vom Unendlichkeitsbegriff als

[16]) Vide J. G. Fichte, loc. cit., pag. 237.

[17]) Vide Kuno Fischer: *Fichte*, 6. Bd. der *Geschichte der neueren Philosophie*, pag. 295.

[18]) Vide J. G. Fichte: *Grundlage des Naturrechts nach Prinzipien der Wissenschaftslehre* (Jena 1796), Einleitung, Anmerkung zu § 9 (gelegentlich einer Auseinandersetzung mit dem Rezensenten seiner Schrift *Über den Begriff der Wissenschaftslehre*).

der Aufgabe eines »unendlichen Bestimmens«[19]), er leugnet damit die Möglichkeit der Erschöpfung einer Zahl durch eine unendliche Reihe und lässt in dieser veränderten Auffassung eine entschiedene Tendenz nach der Seite des potential Unendlichen hindurchblicken. Auch Falckenberg scheint in seiner Darstellung des Fichteschen Systems auf dies Potentiale hinauszukommen, wenn er sagt: »Das Ich soll unendlich und selbständig sein, findet sich aber als endlich und abhängig von einem Nichtich: ein Widerspruch, der dadurch gelöst wird, dass das Ich praktisch wird, die Natur in zunehmendem Masse sich unterwirft und durch solche unaufhörliche Hinausrückung der Grenze sich der Realisierung seiner Bestimmung, absolutes Ich zu werden, in unendlichem Fortschritt annähert.«[20]) Also flüchtet das aktual Unendliche, wenn man sich ihm nähert, wieder in den Bereich des Potentialen.

2

Nachdem einmal der Begriff des Unendlichen einem einerseits beschränkten, andererseits ungezählten Spekulationen Raum gebenden Subjektivismus überlassen war, griff man immer wieder auf das Prinzip des unendlichen Ichs zurück, ohne zur Aufhellung des Problems in irgend einem Punkte beitragen zu können.

Diesen Weg geht auch Schelling, der das Ich in seiner Ausschliesslichkeit für unendlich erklärt: »für seine Selbstanschauung« ist es unendlich und mit ihr zugleich endlich.[21]) Mit solcher Verzichtleistung

[19]) »Was ist denn der Begriff des Unendlichen? Doch wohl der einer Aufgabe, die Seite des Polygons in das Unendliche fort zu teilen, also die Aufgabe eines unendlichen Bestimmens. Aber was ist denn ein Mass, zu dem ihr hier das Unendlicheck brauchen wollt? Doch wohl etwas Bestimmtes. Teilt ihr ins Unendliche fort, wie ihr der Aufgabe nach sollt, so kommt ihr nicht zum Messen. Geht ihr aber an das Messen, so müsst ihr vorher aufgehört haben, zu teilen, und euer Vieleck ist sonach ein endliches, und nicht, wie ihr vorgebt, ein unendliches. Aber weil ihr die Handlungsweise, ein Unendliches zu beschreiben, das ist den leeren Begriff des Unendlichen auffassen und etwa mit *A* bezeichnen könnt, so bekümmert es euch nicht weiter, ob ihr auf diese Weise wirklich gehandelt habt und handeln könnt, und ihr geht mit eurem *A* rüstig an das Geschäft. So macht ihr es in noch mehreren Fällen. Der gesunde Menschenverstand staunt ehrfurchtsvoll eure Taten an und nimmt die Schuld, dass er euch nicht versteht, bescheiden auf sich selbst; wenn aber ein Unbescheidenerer seine Meinung nur im mindesten verlauten lässt, so könnt ihr seine Unfähigkeit zu einer Sache, die euch so ungemein klar ist, und aus der ihr nicht das geringste Arge habt, durch nichts erklären, als dadurch, dass der arme Mann die Anfangsgründe der Wissenschaften nicht gelernt haben müsse.« (Fichte, loc. cit.) — Es ist nun freilich nicht notwendig, die Vorgänge des Teilens und des Messens als zeitlich verschiedene anzusehen. Dadurch wird aber der Grundgedanke der Argumentation nicht aufgehoben.

[20]) Vide R. Falckenberg: *Geschichte der neueren Philosophie* (Leipzig 1905), pag. 379.

[21]) »Das Ich ist unendlich für sich selbst heisst, es ist unendlich für seine Selbstanschauung. Aber das Ich, indem es sich anschaut, wird endlich. Dieser Widerspruch ist nur dadurch aufzulösen, dass das Ich in dieser Endlichkeit sich unendlich wird, das heisst, dass es sich anschaut als ein unendliches

auf jedes Verständnis und unklaren Symbolisierung eines Begriffs ist vielleicht der Phantasie, schwerlich aber dem Erkennen gedient. Das unendliche Fürsichselbstsein des Ichs, »die ursprüngliche Tätigkeit des Ichs« ist vollends »nur dann begreiflich, wenn sich beweisen lässt, dass das Ich als Ich unbegrenzt sein kann, nur insofern es begrenzt ist, und umgekehrt, dass es als Ich begrenzt, nur insofern es unbegrenzt ist«.[22]) Konsequenter indessen, als Fichte, tritt Schelling für die aktuale Unendlichkeit ein, die er selbst dem Kleinsten eingeboren annimmt. I. H. Fichte nennt dies einen »mystischen Gedanken« und meint: »Er müsste nämlich, einer gründlichen metaphysischen Analyse unterworfen, nach rückwärts auf den Begriff schlechthin ursprünglicher Positionen, der bei Schelling mit voller Entschiedenheit nie hervorgetreten ist, nach vorwärts auf den Begriff unendlicher Wechselbeziehung Aller zu Allen geführt haben, kurz, auf allgemeine Untersuchungen metaphysischer Art, wodurch diese Vordersätze seiner Philosophie aufs bestimmteste von Hegel ab und zu Herbart hingelenkt worden sein würden.«[23])

Die Philosophie Hegels, in deren Mittelpunkt das Absolute steht, redet einem ins Unendliche fortgesetzten Fortgange der Vernunft das Wort. Es ist ein *in infinitum* gehender Progressismus, wie wir ihn schon durch Condorcet, Lessing und vor ihnen durch Campanella, Bacon, Descartes und Pascal ausgesprochen sehen, wie er in Frankreich durch Jouffroy, Pelletan und andere vertreten wird. Aus eigener Machtvollkommenheit, durch den in der dialektischen Methode ausgefochtenen, ewig sich wiederholenden Sieg über aufgestellte Widersprüche ringt sich das Absolute zu immer vollkommeneren Formen empor. Bei der Identität, die der absolute Idealismus zwischen Denken und Sein setzt, hat die dialektische Methode zugleich ontologischen Wert. Am Anfang ist für Hegel die Tat, wie schon Fichte lehrte. Das Dilemma des Anfangs lässt sich ohne solches Postulat niemals erklären.

Der Progress, der bei dem steten Wechsel zwischen dem Etwas und dem Andern auftritt, das fortwährende Umschlagen des einen Begriffes, ist ein unendlicher. Was aber ist diese Unendlichkeit? »Ein Sollen des Aufhebens des Endlichen«, das indes im selben Augenblick ein erneutes Entstehen der Endlichkeit mit sich führt. Diese ins Endlose fortgesetzt gedachte Endlichkeit des Endlichen wird von Hegel als die negative oder schlechte Unendlichkeit bezeichnet. »Diese Unendlichkeit ist die schlechte oder negative Unendlichkeit, indem sie nichts ist als die Negation des Endlichen, welches aber ebenso wieder entsteht, somit ebenso sehr nicht aufgehoben ist, oder diese Unendlichkeit drückt nur das Sollen des Aufhebens des Endlichen aus. Der Progress ins Unendliche bleibt bei dem Aussprechen des Widerspruchs stehen und ist das perennierende

---

Werden.« (Friedrich von Schelling: *System des transzendentalen Idealismus* (Tübingen 1801), pag. 73 ff.).

[22]) Vide Schelling, loc. cit., pag. 72.

[23]) Vide Immanuel Hermann Fichte: *Grundzüge zum Systeme der Philosophie*, 3. Abt. (Heidelberg 1846), pag. 90.

Fortsetzen des Wechsels dieser einander herbeiführenden Bestimmungen.«[24])

So liegt der Grund für diese potentiale Unendlichkeit in dem ungelösten Widerspruch, den zwei in eins zu setzende Begriffe hervorrufen, infolge dessen nur der unaufhörliche Wechsel, so unbegreiflich er bleibt, eintreten muss. Kann diese ermüdende Veränderung nicht endlich einmal Vollendung werden? Das Andere ist am Ende selbst das Etwas; wird das Etwas also ein Anderes, so wird es, was es bereits ist, »es geht mit sich zusammen«, »es kommt bei sich an«, es ist vollendet, es wird zur aktualen Unendlichkeit[25]), deren Grundcharakter das absolute Fehlen jeder Grenze, das Aufheben jeden Abschlusses ist. Bedeutet die unendliche Gerade die potentiale Unendlichkeit, bei der der Progress als ein endloser gedacht wird, so sehen wir an dem Kreise das vorzüglichste Beispiel jener geschilderten aktualen, wahren Unendlichkeit. Das endliche und veränderliche Etwas hebt sich also »unendlich in sein Anderes« auf; es wird aus dem Umschlagen seiner eigenen Natur zum Fürsichsein, zur wahrhaften Unendlichkeit. Als Ideelles des Unendlichen erscheint somit das Endliche; und das Unendliche als das eigentlich Affirmative, das sich in der Vernichtung des Endlichen erhält. Über eine solche Art, die Unendlichkeit zu bestimmen, urteilt sehr treffend I. H. Fichte: »Das Affirmative wäre = der unendlichen Negativität und dem Sichselbstaufhebenden; das Unvergängliche = dem ewig Vergehenden; das unendlich Positive eben damit = dem unendlichen Anderswerden und Nichtssein, das heisst selber nur dem unendlichen Nichts.« Und dann weiter: »Aus unendlicher Selbstaufhebung ist und resultiert in alle Ewigkeit Nichts, wenn man nicht voraussetzungsweise das positiv Unendliche mit hinzubringt oder jenem unterlegt.«[26])

Hegel qualifiziert das mathematisch Unendliche als das schlechte Unendliche, und er versteigt sich dazu, das wahre qualitativ Unendliche in der Gestalt Gottes und des Absoluten zu finden. Das tadelt schon Bolzano, indem er die Auffassung des Unendlichen, als wäre es eine ohne Grenze wachsende veränderliche Grösse, verwirft; er bemerkt treffend, dass eine stets wachsende Grösse sehr wohl trotzdem immer eine endliche Grösse bleiben kann. »Was ich nicht zugestehe, ist bloss, dass der Philosoph einen Gegenstand kenne, dem er das Prädikat der Unendlichkeit beizulegen berechtigt sei, ohne in diesem Gegenstande in irgend einer Beziehung erst eine unendliche Grösse oder doch Vielheit nachgewiesen zu haben.«[27])

Die »dialektische Selbstaufhebung des endlichen Seins« führt so zu der Unendlichkeit der Gottheit, denn sein Sein, weil es ja im Anderen

[24]) Vide Georg Fr. Wilh. Hegel: *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften*, § 94.

[25]) »Etwas wird ein Anderes, aber das Andere ist selbst ein Etwas, also wird es gleichfalls ein Anderes und so fort ins Unendliche.« (Hegel, loc. cit., § 93).

[26]) Vgl. I. H. Fichte, loc. cit., pag. 73 und 74.

[27]) Vide Bernard Bolzano: *Paradoxieen des Unendlichen* (Berlin 1889), pag. 8.

ist, liegt im Unendlichen, andererseits leitet das Unendliche in sich selbst zum Endlichen hin. Kritisch bemerkt hierzu I. H. Fichte: »Das »Unendliche« zunächst ist hier noch der ganz unbestimmte Begriff eines Nichtendlichen, nicht sich ins Nichtsein Aufhebenden, sondern Beharrlichen in jenem, dem Wechselnden.«[28]) Es sei nicht zu verkennen, dass mit der Konstatierung des Beharrlichen im Wechsel etwas Richtiges gesagt sei. »Alles Weitere jedoch über das Wesen jenes »Nichtendlichen« müsste, nach diesen Prämissen wenigstens, unentschieden gelassen werden.« Dieses Beharrliche mit dem Absoluten zu identifizieren, bedeutet einen unmotivierten Sprung ins Metaphysische, der ebenso auf dem umgekehrten Wege vom Absoluten zum Endlichen gemacht ist. »Es ist der alte, längst nachgewiesene Zirkel des ganzen Hegelschen Systems in den engsten Raum zusammengedrängt, dass es die Realität der absoluten Idee, die sich ihm dennoch erst als Resultat ergeben soll, doch auch unbewussterweise vorausetzen muss, um jenen Beweis nur antreten zu können.«[29])

3

Die mystische Verknüpfung des Unendlichkeitsbegriffs mit ebenso mystischen Ideen kann auf die Dauer dem wissenschaftlichen Drange nach Wahrheit keinen Inhalt, geschweige die Möglichkeit einer Klärung des Rätsels darbieten. Man ging von Kant aus, befindet sich indes mittlerweile auf einem Holzweg; da bleibt nur schleunige Umkehr zum Transzendentalphilosophen und erneutes Pfadsuchen übrig. In diesem Sinne wirkt Herbart, der in der Antinomieenlehre das Fundament aller Philosophie erblickt, die es in der Hauptsache mit der Bearbeitung und Berichtigung der sich zunächst widersprechenden Begriffe zu tun hat.

Dem Unendlichen als einem Unbestimmtheit enthaltenden Begriff wird von Herbart jede objektive Realität abgesprochen, denn der Begriff des Seins schliesst jede Unbestimmtheit aus. Nur das potential Unendliche wird von ihm in die Untersuchung gezogen, das aktual Unendliche ist ihm widerspruchsvoll. Zu dem Begriff des Unendlichen gelangen wir durch die Möglichkeit einer wandelbaren Grenze, »jenseits deren immer noch etwas zu finden ist«. Sobald man das Unendliche als vollendet ansieht, sinkt man wieder in die Endlichkeit zurück. Es ist unmöglich, eine unendliche Menge abzuzählen.[30]) Die Unendlichkeit ist für Herbart »ein Prädikat für Gedankendinge, mit deren Konstruktion wir niemals fertig werden.«[31]) Er meint, aus diesem Umstande das Rätsel der Vielwertigkeit des Unendlichen zu erklären. Die Formen des Raumes und der Zeit zeigen die Möglichkeit an, »dass in beliebigen Distanzen ein Dasein und Geschehen könne angetroffen werden«.[32]) Wenn wir also

---

[28]) Vide I. H. Fichte, loc. cit., pag. 68.
[29]) Vide I. H. Fichte, loc. cit., pag. 74.
[30]) Über die »wandelbare Grenze« Herbarts spottet Cantor (vide weiter unten Note 90 dieser Schrift).
[31]) Vide Johann Friedrich Herbart: *Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie* (Königsberg 1837), pag. 156.
[32]) Vide Herbart, loc. cit., pag. 155.

diese beiden Formen unserer Sinnlichkeit als unendliche Grössen betrachten, so müssen wir dies in dem Sinne verstehen, dass wir die besprochene Möglichkeit uns in ihrer ganzen Wirksamkeit expliziert denken.

Einfache Reale sollen nach Herbart die Widersprüche der mannigfaltigen Formen der Erscheinungswelt erklären und die Widersprüche der Veränderung lösen; sie sind uns nicht mehr vorstellbar und nicht begründbar, weil sie das letzte darstellen sollen, und zu einer Begründung immer noch etwas Allgemeineres anzusetzen wäre, das Absolute wird so zu einer Tausend-Einigkeit. Der bereits mehrfach erwähnte I. H. Fichte bemerkt hierzu kritisch: »Dieser Ansicht und Argumentationsweise entgegen, welche allerdings eine unbestimmte Mehrheit von (relativ für uns) Absolutheiten voraussetzt, ist der doppelte Beweis zu führen; teils, wie jene Mannigfaltigkeit einfacher Wesen nicht sein oder gedacht werden kann, ohne zugleich deren innere Beziehung auf einander zu denken, — dass nämlich, indem jedes ein Anderes, von jedem Unterschiedenes ist, diese gegenseitige Negation nicht sein könne, ohne zugleich einen wechselseitigen positiven Zusammenhang (irgend welcher Art) notwendig zu machen —; teils, dass hierin auch die Notwendigkeit gegeben sei, einen wahrhaft letzten, sie einenden Urgrund ihrer selbst und ihres Zusammenhanges vorauszusetzen, welcher eben deshalb seinem Begriffe nach als schlechthin nur Einer sich erweisen muss.«[33])

Bemerkenswert ist, wie Herbart sich über das Differential auslässt, das nach ihm sich zum Integral verhält, wie das Sinnliche zum Übersinnlichen. Er meint: »Das Differential, für sich allein betrachtet, ist vollkommen gleich null; und dieselbe Nullität findet sich auch in der ganzen Erfahrung ohne Ausnahme, der innern, wie der äussern; samt den eingebildeten intellektualen Anschauungen, die, wenn sie wirklich stattfänden, nicht den geringsten Vorrang vor den sinnlichen haben würden, sofern sie nicht nachweisen könnten, frei zu sein von den inneren Widersprüchen, um derentwillen jene einer Zensur unterliegen.«[34]) Wie zu jeder Erscheinung das Ding an sich gedacht werden muss, so ist das Differential lediglich für das Integral vorhanden, auf das es sich von vornherein beziehen muss, wollen wir nicht mit seiner Setzung einen leeren Begriff konstruieren, dessen logische Berechtigung nicht vorhanden ist. Überhaupt möge man sich den Begriff des Differentials nicht etwa als »irgend eine wie immer kleine, schon vorhandene Grösse« denken, seine Bedeutung liegt nicht in ihm, sondern erstreckt sich auf die zuerteilte Variable, deren Absicht, zu wachsen, sie lediglich kundtut.

4

Wie schon verschiedentlich angedeutet, können wir den kontinuierlichen Fortgang in den geschilderten Ansichten über unseren Begriff bei I. H. Fichte finden, der es sich hat angelegen sein lassen, das Wesentliche und Verwandte in den Lehren Schellings, Hegels und Herbarts zu

[33]) Vide I. H. Fichte, loc. cit., pag. 70.
[34]) Vide Herbart, loc. cit., pag. 260.

einem einheitlichen Ganzen herauszuheben, aus welchem Grunde er an dieser Stelle Erwähnung verdient.

Bei I. H. Fichte macht sich die alte Frage geltend: wie erklärt sich der Widerspruch des Seins, »als bloss endlich gedacht«? In der Empfindung finden wir die Lösung nicht, wir müssen vielmehr »über die sinnlich-gegebene Unmittelbarkeit und die Sphäre bedingter Gründe hinausgehen in das metaphysische Gebiet.«[35]) Nun darf sich das Endliche nicht unmotiviert ins Absolute aufheben, das wäre der alte Hegelsche Fehler, den schon Herbarts Reale beseitigt hatten. »Das »Endliche« nach seinem wahren Wesen ist die durch Verneinung gegen Anderes und gegen sich selbst hindurchgegangene, dadurch vermittelte, aber ebenso darin als solche beharrende Urbestimmtheit.«[36]) Urbestimmtheit ist die im Wechsel der Veränderungen verharrende Bestimmtheit des Endlichen.

Die Frage des Unendlichen, sobald sie im Hinblick auf das konkret Unendliche angeregt wird, ist von der Frage der Idealität des Raumes nicht zu trennen. Da uns der Raum, so sagt I. H. Fichte, als ein unendlicher gegeben ist, ein Unendliches aber »weder Ergebnis unmittelbarer Erfahrung sein«, noch »als Summe erfahrbarer endlicher Grössen allmählich in uns sich gebildet haben« kann[37]), so ist unsere Kenntnis von ihm eine apriorische; indessen lässt der Begriff der unendlichen Kontinuität und der unendlichen Teilbarkeit ihn in Wahrheit nicht als das Nebeneinander von Teilen erkennen: »eben als unendlicher, das heisst, weil er als ein Unendliches nach aussen und innen sich darstellt, ist er nur zu denken als unendliches Expansions- (Bewegungs-) Phänomen eines darin gegenwärtigen gleichfalls unendlichen Wirkens, einer unablässigen Tat.«[38])

Die Frage nach der Existenz des konkret Unendlichen, die jeder Spekulation über das ganze Problem sich vor allem aufdrängt, hat wohl die meisten Wandlungen erlebt. Während wir bei den Neuscholastikern in der Abwehr des konkret Unendlichen als eines aktual Unendlichen allgemeine Übereinstimmung finden — nur in der Anschauung über das abstrakt Unendliche differieren sie unter einander —, wird das Gegenteil in der vorkantischen Philosophie hauptsächlich durch Descartes, Spinoza, Leibniz und Locke vertreten. Mit diesen Philosophen stimmt, um in unserer Darstellung fortzufahren, von den Neueren Hermann Lotze insofern überein, als er das aktual Unendliche *in concreto* verteidigt, *in abstracto* aber verwirft.[39]) Gehen wir noch mit einigen Worten auf diesen Autor ein.

Infolge der Widersprüche, die sich aus dem Begriff der Kausalität ergeben, infolge der Unbegreiflichkeit der gegenseitigen Einwirkung der

---

[35]) Vide I. H. Fichte, loc. cit., pag. 63.
[36]) Vide I. H. Fichte, loc. cit., pag. 88.
[37]) Vide I. H. Fichte: *Psychologie* (Leipzig 1864), 1. Teil, pag. 28.
[38]) Vide I. H. Fichte, loc. cit., pag. 29.
[39]) In einer von Cantor angezogenen Polemik gegen Renouvier, die unter dem Titel *L'infini actuel est-il contradictoire?* in Ribots *Revue Philosophique*, 9. Bd. (1880), erschienen ist.

Dinge, setzt Lotze eine einheitliche Substanz *M*, die Gott ist, die alles wirkt, das Seiende und Absolute ist, dem gegenüber das Sein der Dinge nur der Schein dieses Wirkens ist. »Die Zahl der zerstreuten Atome ist nur die Anzahl der diskreten Erscheinungen, welche in räumlicher Anschauung dem einen Element gemäss der Vielfältigkeit der Wechselwirkungen gebühren, in die es mit anderen verflochten ist.«[40]) Diese Atome sind an und für sich unräumlich, sie besitzen eine unendliche, aber lediglich »dynamische Teilbarkeit«. »Kein Raum, keine Zeit, keine Bewegung kann ausser uns sein — weil jede Form der Beziehung nur in dem sein kann, für welche sie ist.«[41]) So lehrt Lotze auch in seiner kleinen *Metaphysik* vom Jahre 1841 den Idealismus von Raum und Zeit. Die Unermesslichkeit des Raumes und die endlose Dauer der Zeit besitzen keine Objektivität, »noch bieten sie einer Bewegung in der Tat ein Feld des Geschehens dar«.[42]) Die Anschauungen Lotzes über die Subjektivität einer unendlich leeren Zeit und der Zeitfolge haben bekanntlich im Verlauf seiner philosophischen Entwickelung verschiedene Änderungen erfahren, und die Unsicherheit der Auffassung hat zu einer Reihe polemischer Schriften Anlass gegeben.[43])

Der Standpunkt des kategorematisch Unendlichen wird in durchaus origineller Weise durch C h a l y b a e u s vertreten. Die Materie als das Unendliche (ἄπειρον) ist kein Begrenztes, wie etwa durch die Beziehung des Begriffs auf die Grenze (πέρας) angenommen werden, und wie es scheinen könnte, wenn man meinte, dass es, ausserhalb des Endlichen liegend, an diesem eine Grenze haben müsste. Es ist das wirkliche Unendliche, das den Ort darstellt, wo sich seine »Formbestimmungen«, das Endliche und das abstrakte Unendliche in steter Abwechselung tummeln; die sich wohl gegenseitig, keineswegs aber das wirklich Unendliche aufheben, das sich in ihnen »als Seiendes unaufgehoben stetig kontinuiert«[44]), das konkret Unendliche, das zum Inhalte jene beiden Formen hat. Die Frage, wie es möglich ist, dass das konkret Unendliche durch das seinen Inhalt teilweise ausmachende Endliche nicht vereitelt wird, wird gelöst, indem »das zweite Moment als Formbestimmung des ersten, diese Formbestimmung aber als Selbstbestimmung des Ganzen oder als Vermittelung gesetzt wird«.[45]) Die Form der Vermittelung ist die Be-

---

[40]) Vide Hermann Lotze: *System der Philosophie*, 2. Bd.: *Metaphysik* (Leipzig 1879), pag. 384.

[41]) Vide Lotze, loc. cit., pag. 297.

[42]) Vide Lotze, loc. cit., pag. 301.

[43]) Über die Entwickelung der Lotzeschen Zeitlehre vide R. Falckenberg in der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 105. Bd. (1895), 2. Heft, pag. 178 ff. — Es ist bei dem Eklektiker Lotze nicht verwunderlich, dass verschiedene seiner Anschauungen zuweilen einander konträr gegenüberstehen. Wenn das Eine, Unendliche sich einmal in die Vielheit der Einzeldinge zerlegt, wenn es diese Vielheit ist, die sie eben aus sich entlassen hat, so kann es ein anderes Mal infolge der unteilbaren Einheitlichkeit seiner unendlichen Natur nur ganz und ungeteilt in den Einzeldingen sein.

[44]) Vide Heinrich Moritz Chalybaeus: *Entwurf eines Systems der Wissenschaftslehre* (Kiel 1846), pag. 106.

[45]) Vide Chalybaeus, loc. cit., pag. 107.

wegung. So wird die Bewegung dazu verwandt, um die Endlichkeit in der konkreten »Einheit des unendlich Seienden« zu erhalten. Mit anderen Worten: die Potentialität eines unendlichen Progresses versöhnt die Vernunft mit der angenommenen Aktualität des Weltganzen. Von der mathematischen Anschauung des abstrakt Unendlichen gelangen wir zum objektiv konkret Unendlichen, indem wir »die quantitativen Bestimmungen des Unendlichen«, wie sie Bestimmungen unseres Denkens sind, von diesem Denken emanzipieren, sie objektivieren, so dass sie in die Objektivität des wirklichen Unendlichen übergehen; durch die notwendige Gegenseitigkeit zu anderen Bestimmungen erscheinen sie als Selbstbewegung, »das Unendliche hört auf, eine unbestimmbare Grösse zu sein, und wird in sich selbst durch das Verhältnis seiner Teile zu seinem eigenen Masse.«[46]) So vollzieht sich die Metamorphose des mathematisch Unendlichen »zum System bewegter Weltkörper«. Das konkret Unendliche verdankt seine Existenz dem Aufsichbezogensein der unendlichen Ausdehnung, denn dieser Charakter der Materie führt zur Elastizität, und die hieraus resultierenden Kohäsionsgrade geben den wahren Inhalt ab.[47]) Was speziell das objektiv Unendliche betrifft, so ist nach Chalybaeus klar, dass das Seiende, als jenseits vom Nichtsein als dem Nichtzudenkenden, an diesem auch nicht begrenzbar ist, »sondern seiner extensiven Grösse nach nur bestimmbar an sich selbst«.[48]) Deshalb kann auch überhaupt nicht nach der Grösse des Unendlichen gefragt werden, wollen wir nicht mit dem ersten Anlegen eines Massstabes ein Anderes setzen, was eine offenbare Paradoxie bedeutet. Dennoch können wir sagen, dass der Welt gewisse innere Grenzen zukommen, wenn wir an das Gleichgewicht der Kräfte erinnern, trotz aller extensiven Unbegrenztheit, bei aller durch das auf sich bezogene Ausgedehntsein bedingten Wechselseitigkeit zwischen Extensität und Intensität.

Dass mit der Weltanschauung der Nachfolger Kants zu brechen sei, betont R. Hamerling in seiner *Atomistik des Willens,* wenn er dafür plädiert, dass man aufhören möge, das Unendliche als etwas Selbständiges, Ausser-Seiendes, vom Endlichen Getrenntes hinzustellen; denn das Unendliche ist im Endlichen. »Etwas an und für sich ist das Unendliche niemals, denn sonst wäre es nicht Alles.«[49]) Die panlogistischen Evolutionshypothesen, die durch die widerspruchslose Position einer Unendlichkeit das Endliche zu einem unreinen Abszess erniedrigten, der zu negieren sei, bedeuteten eine Verirrung des philosophischen Denkens. »Das Unendliche existiert nirgends als im Endlichen«[50]), beide sind in einander, Endlichkeit und Unendlichkeit sind nur Erscheinungsformen des Exstierenden, nur Ansichten im Charakter des Seins, das, unter dem Gesichtspunkt des Endlichen betrachtet, als Werden auftritt. Als Gewordenes,

---

[46]) Vide Chalybaeus, loc. cit., pag. 123.
[47]) Vide Chalybaeus, loc. cit., pag. 108.
[48]) Vide Chalybaeus, loc. cit., pag. 109.
[49]) Vide Robert Hamerling: *Die Atomistik des Willens* (Hamburg 1880), 1. Teil, pag. 136.
[50]) Vide Hamerling, loc. cit., pag. 134.

sofern die Vollendung alles Werdens eingetreten ist, ist es unendlich. Eine scheinbar seltsame Paradoxie tritt uns hierbei auf. Das Unendliche muss auch endlich sein; im anderen Falle fehlt ihm ein Prädikat an seiner Vollkommenheit, und es sänke wieder in die Endlichkeit zurück. »Das Unendliche schliesst das Nichtendliche und das Endliche in sich, ist die Einheit beider.«[51])

Nehmen wir das Hamerlingsche Nichtendliche als das potential Unendliche, das allumfassende Unendliche als das aktual Unendliche, so sehen wir in mystisch-poetischer Gestalt die alte Frage wieder auftauchen, und wir erkennen in Hamerling den unbedingten Anhänger der Aktualität des Unendlichkeitsbegriffes, der in seiner Polaritätstheorie einen allgemeinen Ausdruck findet.

5 (Anhang)

Gegenüber den scharfsinnigen Betrachtungen Kants und der idealistischen Philosophen mutet das materialistische Geplänkel, in dem der Mitläufer Naturalismus sich gefällt, stets seltsam an. So meditiert zum Beispiel auch der Königsberger Arzt Czolbe[52]) über das Unendlichkeitsproblem. Als Beweis für die Unendlichkeit der Welt werden irgend welche unerklärlichen zu tage liegenden Rätsel, zum Beispiel Keimzellen oder dergleichen, angeführt. Ein systematisches Denken wird in diesem naiven, fetischistischen Hylozoismus eine Befriedigung nicht finden. Wer sagt: »Ich glaube, dass jedem Kinde, das seinem Gotte das Prädikat der Ewigkeit beilegt, vollkommen klar ist, was es damit sagt«, wer in seinem Denken bis zu dem Punkte überhaupt noch nicht vorgedrungen ist, an dem der Widerstreit der Antinomieen ihm fühlbar wird, der kann zur Aufhellung der Probleme, die er in Angriff nimmt, wenig beitragen.

In dieser Beziehung steht der von Czolbe angegriffene J. B. Meyer bedeutend höher, wenn er sagt: »Die Ewigkeit des Seins ist um nichts begreiflicher, als der Uranfang oder die Ewigkeit des Schaffens. Mögen die Materialisten mit ewigem Stoff, ewiger Bewegung und ewigem Gesetz die Welt konstruieren; die Ewigkeit dieser Dreieinigkeit und die Überzeugung ihrer allmächtigen Zeugungsfähigkeit von allem Sein ist nur das unbeweisbare Dogma ihres Stoffglaubens.«[53]) Czolbe kann uns nichts Neues bringen, wenn er erklärt, dass wir trotz des Begriffes eines begrenzten Raumes dennoch das Bewusstsein des unaufhörlichen Vergrösserns seines Bezirkes haben. »Der Raum ist neben den sinnlichen Wahrnehmungen und Körpern durchaus selbständig, etwas drittes Unendliches oder Unbegrenztes.«

---

[51]) Vide Hamerling, loc. cit., pag. 137.

[52]) Heinrich Czolbe: *Die Grenzen und der Ursprung der menschlichen Erkenntnis im Gegensatz zu Kant und Hegel* (Jena und Leipzig 1865).

[53]) Vide Jürgen Bona Meyer: *Zum Streit über Leib und Seele* (Hamburg 1856), pag. 39.

DRITTER ABSCHNITT

Das Eindringen mathematischer Betrachtungsweise in die metaphysische Spekulation

1

Es ist eine überaus bemerkenswerte Tatsache, dass gerade die exakte Wissenschaft der Mathematik darauf angewiesen ist, einem Begriffe gegenüber Stellung zu nehmen, der als der unklarste selbst der geduldigen philosophischen Spekulation von jeher die grössten Schwierigkeiten bereitet hat. Wenn daher der Mathematiker an dieser Stelle gezwungen war, Metaphysiker zu werden, so kann man sich denken, dass die hierbei erzielten Resultate, mochten sie nun auch einer bestimmten Methode Rechnung tragen, dem tiefern und allgemeinern Denken keine sonderliche Befriedigung bringen konnten; der Philosoph sah sich vor die Notwendigkeit gestellt, die mitunter nichts weniger als durchsichtigen Phänomene der mathematischen Forschung seinem gewissenhaften Denken anzupassen. War diese Umformung neuer von der Mathematik zur Lösung eines sich mächtig geltend machenden Problems aufgestellter Ideen schon in der Euklidischen Geometrie, der niedern Arithmetik und Algebra mitunter keine leichte Aufgabe, so verschärfte sich vollends die Krisis und die Ratlosigkeit gegenüber den sich häufenden Rätseln mit der Einführung der Infinitesimalrechnung, die ihren eminent spekulativen Gehalt durch die Tatsache zu zeigen scheint, dass von ihren beiden genialen Entdeckern der eine ein bedeutender Philosoph, der andere mit dem Genie einer unerhörten wissenschaftlichen Forschungsgabe einen scharfen Blick für alle methaphysischen Bedürfnisse verband. »Leibniz und Newton haben beide den erkenntniskritischen Grund ihres Begriffes durchschaut. Beide sind Entdecker desselben. Und sie erweisen sich als solche in dieser erkenntniskritischen Begründung.«[54])

Gerade die erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten, die mit der Einführung der unendlich kleinen Grössen verknüpft waren, und die die Neigung zu unexakten Spekulationen begünstigen, haben bei Mathematikern, die nicht geneigt waren, ihre strengen Deduktionen durch unklare und gar zu leicht irreführende Vorstellungen trüben zu lassen, eine Reaktion

[54]) Vide Hermann Cohen: *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte* (Berlin 1883), pag. 87.

gegen die Prinzipien der Differentialrechnung hervorgerufen. So hat Lagrange in seiner *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel*, den Zweck verfolgt, »die Infinitesimalrechnung von den dunklen und unsicheren Vorstellungen unendlich kleiner Grössen zu befreien.«[55]) Er weist zum Beispiel nach, dass die Prinzipien der Differentialrechnung bei der Ableitung der Funktion $y = \frac{1}{a-z} - \frac{1}{a}$ unrichtig werden, wenn $z > a$, und Crelle findet es »zu bewundern, dass sie es bei der unbestimmten und widersprechenden Voraussetzung von unendlich kleinen Grössen nicht noch öfter sind.«[56])

Leibniz hatte sich ausdrücklich dagegen verwahrt, das Differential als Null anzusetzen; denn es sei logisch unvorstellbar, wie Nichtse endliche Verhältnisse mit einander bilden könnten, was doch beim Differentialquotienten der Fall sei. Ungeachtet dieses Protestes finden wir bei Späteren diesen verpönten Gedanken mit Nachdruck vertreten. Der Physiker E. G. Fischer kommt in seiner 1808 erschienenen *Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis, nebst einer idealischen Übersicht der Mathematik und Naturkunde nach ihrem ganzen Umfange* zu dem Resultat, dass das Unendliche »notwendig aus dem Wesen unserer Vorstellung« entspringe, dass das Differential *dx*, das er, wie schon Euler, und später Fries, gleich Null setzt, nicht etwa eine willkürliche Erfindung darstelle; es sei vielmehr die Endgrenze einer veränderlichen Grösse, die von einer extensiven Differenz, vom Nebeneinander in das intensive Ineinander des nichtanschaulichen Differentialbegriffes übergeht. Cohen, der sich in seiner Schrift über das Prinzip der Infinitesimalmethode mit Fischer beschäftigt, führt unter anderm den folgenden Satz an: »Die innere Möglichkeit aber, zwei verschwindenden Grössen ein intensives Verhältnis beizulegen, beruhte im Grunde darauf, dass eine Grösse, die in einer gewissen Beziehung Nichts ist, auch bei jeder beliebigen Vervielfältigung in eben dieser Beziehung Nichts bleibt, dass aber dennoch jede Vervielfältigung an sich eine wirkliche Vermehrung in der Vorstellung, das heisst eine wirkliche Vorstellung von einer intensiven Grösse ist.« Der Begriff der intensiven Grösse ist durch den Gedanken eines Ineinander verschiedener Punkte vorstellbar zu machen.

Wir hatten auf die Notwendigkeit aufmerksam gemacht, die von den Mathematikern eingeschlagene Richtung in Sachen des Unendlichen, deren innere Klarheit für jene nur insoweit Problem ist, als es die Zuverlässigkeit der Rechnung erfordert, einer gründlichen wissenschaftlichen Spekulation zur weitern Ausarbeitung zu überlassen. Man kann es aber wohl einen Missbrauch dieses Sondierungsrechts nennen, wenn das grosse Heer metaphysischer Möglichkeiten auf diesen nach strenger Exaktheit strebenden Begriff losgelassen wird. Man kommt dann in Bälde zu seltsamen Schrullen, bei denen es dem Betrachter schwer wird, ernst zu blei-

---

[55]) Vide A. L. Crelle in der von ihm veranstalteten deutschen Ausgabe der mathematischen Werke J. L. Lagranges (Berlin 1823), 1. Bd., auf der 12. und 13. Seite seiner (nicht paginierten) Vorrede.

[56]) Vide Lagranges mathematische Werke, 2. Bd., pag. 218.

ben. Ein Beispiel dieser sonderbaren Spezies bietet der originelle Schellingianer J. J. Wagner mit seiner *Mathematischen Philosophie*. Um die Bedeutung des Unendlichkeitsbegriffs bei ihm zu verstehen, sei hier in Kürze der Gedankengang dieser überaus merkwürdigen Philosophie, die in der Sprache eine »klimatisch und national gewordene Arithmetik« erblickt,[57]) angedeutet.

Das Grundprinzip der aus dem schöpferischen Sein der Gottheit hervorgegangenen Welt ist die Dyas, der Gegensatz, dessen Erklärung in dem sich als Produktion notwendig fortsetzenden Schaffen zu suchen ist, sofern die Glieder des Gegensatzes infolge eines Ansichsetzens zugleich als Einheiten gesetzt sind, somit jedes dingliche Eins immer noch in Pole zerfällt werden kann; so sind Zahlen wesentlich Brüche, so ist die Sprache »Bruchrechnung«, wo der Nenner das Allgemeine, der Zähler das Empirische enthält. Der Amortisationsprozess, dem die Eins unterliegt, die aus sich heraus die Zwei (Entwickelung) gebiert, führt hinsichtlich der anderen Hälfte auf den Gedanken des Überganges in die Null (Tod). Aus der Null entsteht jedoch wieder neue Vielheit. Mit der Dyas ist der Strom des Zahlenprogresses ins Unendliche gesetzt; die Dreieinigkeit, die in der Verbindung der Gegensätze liegt, führt zur Trias, deren zur Tetras strebende Form gegenüber der selbständigen Dyas den Prozess des reflektierenden Denkens darstellt; mit der Tetras beginnt die Wiederholung des Vorganges, wenn sie auch mit der Idee der Potenz Neues bringt. Potenz ist Bestehen, ist »Gleichheit der Form mit dem Inhalte«; denn die Form (Exponent) wiederholt sich im Inhalte (Wurzel); diese Wurzel ist infolge des notwendigen Zusammenseins der Zahlen 2 und 3 in allen endlichen Dingen eine zweiteilige. Da nun nach dieser Ableitung der Dinge aus einem Binom jeder Fortgang in der Natur nach bestimmten Regeln der Kombination vor sich gehen muss, definiert Wagner das Unendliche als das Charakteristikum dessen, »was in binomischer Reihe mit gesetzmässig fortschreitenden Koeffizienten sich entwickelt, in Differenz- und Summenreihen neue Verhältnisse gibt und durch Kombinationsformeln in geschlossener Sphäre befangen die Erschöpfung eines gefundenen Gesetzes darstellt«. Da keine Bruchreihe ein bestimmtes Intervall erschöpft, so »ist jedes Begrenzte innerhalb seiner Grenze unendlich«; so will Wagner die Gefahr des Endlichen, die der bestimmten Unendlichkeit droht, heben, indem er sie durch Ignorierung zu vereiteln sucht; »jede Grenze ist im Unendlichen«, aus diesem Grunde ist eine Überschreitung der Grenze möglich, ist eine Beweglichkeit der Grenze notwendig, und die Repräsentanten dieser beweglichen Grenzen sind die Zahlen, zu denen die Null und die Eins als Aktualitäten im Gegensatz stehen. Dies ist ja der Grundgedanke der Wagnerschen Lehre, dass die Dinge als Brüche zwischen 0 und 1 als den Nichtzahlen existieren. Gemäss der Form des Bruches stehen je zwei Zahlen im Wechselverhältnis, und falls wir diese Zahlen als veränderlich denken, erkennen wir in ihrer Gegenbewegung den ver-

---

[57]) Vide Johann Jakob Wagner: *Mathematische Philosophie* (Ulm 1851), pag. 8.

geblichen Amortisationsversuch des zwischen ihnen liegenden Unendlichen. So geht der Prozess vom Differenzen- zum Differentialquotienten. »Es heisst daher Differenzieren in absoluter Bedeutung des göttlichen Wesens Schaffen, in relativ ideeller Bedeutung ist die Differentiale das Denken, in relativ realer (physischer) Bedeutung der Zeugungsakt und in universaler Bedeutung der erschaffenen Welt das Produzieren überhaupt.« Wo differenziert wird, muss gehäuft, muss integriert werden, solches verlangt der Gegensatz. Das Integrieren gibt dann für jene vier Stufen »die Vernichtung, das Gefühl, den Tod und die Palingenesie, wobei Gott, Seele, Geschlecht und Leben als Integralen gefunden werden«.

Ob diese mystischen Selbstbetäubungsversuche im Gewande mathematischer Formeln eine grosse Anziehungskraft auszuüben vermögen, wollen wir dahingestellt sein lassen. Der Verfasser scheint das anzunehmen, denn er droht in seiner Vorrede, dass er »die Hummeln, welche sonst Ideen aus meinen Schriften, ohne mich zu nennen, in die ihrigen übertragen, züchtigen werde, wenn sie an diesem Buche ebenfalls ihrer Natur gemäss handeln«. Es bedeutete jedoch entschieden ein Hinausgreifen über den Rahmen dieser Schrift, wollten wir uns noch länger mit derartigen Versuchen befassen, den Unendlichkeitsbegriff in unkritischer Weise zum Gegenstand einer Metaphysik zu machen. Die Wagnersche Spekulation fand aus dem Grunde an dieser Stelle Erwähnung, weil sie ein Beispiel dafür darstellt, dass eine Überspannung relativ junger und grosse Hoffnungen erweckender Forschungsresultate aus der exakten Wissenschaft zu eitlen Phantasmagorieen führen muss.

Soll das Denken zur Besinnung über seinen Gegenstand gelangen, so nützen nicht auf dem Sande metaphysischer Träumerei erbaute Luftschlösser, sondern genaue Sonderung und kritische Musterung. Einen solchen Versuch der Unterscheidung mathematischer und metaphysischer Unendlichkeit macht G. Hagemann in seinen *Elementen der Philosophie*. Nach ihm ist das mathematisch Unendliche nur »eine Grösse, die keine Grenzen hat, also entweder eine unendliche Zahl oder eine unendliche Ausdehnung. Eine solche Grösse aber kann niemals in Wirklichkeit existieren, weil die Zahl und Ausdehnung immer grösser gedacht werden, also niemals unendlich gross sein können. Also ist das mathematisch Unendliche nur in unseren Gedanken real; das Wirkliche, welches ihm entspricht, ist endlich und begrenzt, aber der Möglichkeit nach unendlich, weil es ohne Ende vergrössert werden kann, und durch stete Zunahme seine Grenzen immer weiter gerückt werden.«[58]) Das mathematisch Unendliche wäre also das aktual Unendliche, so müsste man danach annehmen, da ja nur in der Wirklichkeit von der potentialen Unendlichkeit gesprochen wird. Wird hinterher das mathematische Unendliche »das Unendliche der Möglichkeit nach« (*indefinitum*) genannt, so ist dies ein Fehlschluss. Das metaphysisch Unendliche ist dann für Hagemann »das im Sein schrankenlose Wesen, welches als solches reine Wirklichkeit, die

[58]) Vide G. Hagemann: *Elemente der Philosophie* (Münster 1870), 2. Teil, pag. 35.

Fülle des Seins oder schlechthin vollkommen ist«. Es steht jenseits jeder Vermehrung. Das Endliche geht dem Unendlichen begrifflich voraus, und während wir das Endliche durch einfache Bejahung seiner realen Bestimmungen erhalten, wobei nur die dem gegenwärtigen Endlichen immanenten Bestimmungen uns gegenständlich werden, erhalten wir den Begriff einer noch grössern Mehrheit von Bestimmungen erst durch Vergleichung mit neuen Endlichkeiten. Unverständlich bleibt nach dieser Definition die Behauptung, dass das Unendliche durch doppelte Negation erhalten werde,[59]) da doch das Endliche in positiver Hinsicht aufgefasst wird, und eine Position von Schranken keine negierende Tätigkeit bedeuten kann. Wenn Hagemann die Existenz des aktual mathematisch Unendlichen in unseren Gedanken annimmt, so wäre, sollte man meinen, das Problem mit der Gegenüberstellung des wirklichen als des potential Unendlichen erledigt; das metaphysische Unendliche kommt also *post festum* und bedeutet mit Hinsicht auf das potential Unendliche, in dem es stecken soll, eine Paradoxie.

2

Eine neue Ära beginnt für den Unendlichkeitsbegriff mit dem Augenblick, wo versucht wird, ihn, von Raum und Zeit getrennt, lediglich als Zahlbegriff in die philosophische Spekulation hineinzuziehen. Einen solchen Schritt unternimmt E. Dühring in seiner 1865 erschienenen *Natürlichen Dialektik,* wobei er sich des »wichtigen Vorteils« bewusst ist, den er durch solche auf die Spitze getriebene Spekulation vor seinen Vorgängern voraus hat. Im Mittelpunkt seiner Untersuchungen steht somit das Problem der Denkbarkeit der unendlichen Zahl, als Fundamentalschema und wissenschaftliche Direktive wird die Form der unendlichen Reihe aufgestellt, auf der sich in der Logik das unbegrenzte Gebäude »möglicher Voraussetzungen oder Begründungen«,[60]) in der Mathematik die gedanklichen Prozesse unendlicher Teilung oder Zusammensetzung aufbauen. Ein Unterschied wird von Dühring in der unaufhörlichen Wiederholung der Einheit und der Wiederholung ins Unbegrenzte gemacht. »Mit jener ersteren Vorstellung bleibt man nur seinem eigenen Begriff von der unbegrenzten Wiederholung treu, während man mit dem andern Gedanken etwas über die Beschaffenheit der Dinge und des Verstandes behauptet, was einerseits nie durch Erfahrung festgestellt und andrerseits auch nie durch blosses Denken ausgemacht werden kann.«[61]) Will man nach Dühring überhaupt jenen Gedanken der Unbeschränktheit untersuchen, so muss man sich vor Augen halten, dass das logische Hindernis für eine grenzenlose Fortsetzung nicht erst im Unendlichen zu suchen sei, vielmehr mussten die Gründe hierfür bereits bei dem Inkrafttreten der Synthesis der ersten beiden Einheiten zu tage kommen; die Widerspruchslosigkeit im Setzen der zweiten Einheit involviert die Unbeschränktheit der Funktion, die stets unveränderlich die selbe bleibt.

[59]) Vide Hagemann, loc. cit., pag. 36.
[60]) Vide Eugen Dühring: *Natürliche Dialektik* (Berlin 1865), pag. 111.
[61]) Vide Dühring, loc. cit., pag. 112.

Mag nun der Beweis geführt werden, wie er wolle, die zuletzt ausgesprochene Prämisse von der Unveränderlichkeit der setzenden Funktion ist nicht stichhaltig, wie Cantor gezeigt hat, und wie die Lehre von den unendlichen Reihen zeigt. Während nämlich bei einer endlichen Reihe die Reihenfolge, in der die setzende Funktion sich der einzelnen Glieder zum Zwecke der Synthesis bemächtigt, gleichgültig ist, trifft dieses im Unendlichen, im Cantorschen Transfiniten, nicht mehr zu.

Dühring setzt sich von vornherein in direkten Gegensatz zu den Voraussetzungen, auf denen die Anhänger der aktualen Unendlichkeit ihre Theorie errichten, wenn sie sagen, dass das, was in unserem Geiste gezählt werden soll, bereits als gegeben in unserem Verstande sein muss, dass zum wenigsten eine feste Bahn vorhanden sein muss, in der sich die synthetische Funktion betätigen kann. Gegen solche Gegebenheit polemisiert Dühring.[62]) »Die Vorstellung des Gegebenseins ist nämlich gar nicht ohne den Gedanken des Gegebenwerdens vollziehbar.«[63]) Sofern das, was gegeben sein soll, eine Vielheit ist, müssen wir Dühring zustimmen, denn eine solche ist immer erst das Resultat unserer Verstandesfunktion, wenn wir sie auch in abgekürzter Zusammenfassung voraussetzen. Denken wir uns aber unter dem Gegebenen lediglich die Direktive in unserem Geiste, die Bahn, auf der sich dieser bewegen soll, so kann von einer erst zu vollziehenden Synthesis füglich nicht gesprochen werden. Bei der letzteren Auffassung braucht die zusammenfassende Funktion überhaupt nicht in Frage zu kommen, da gar nicht von einer Vielheit, vielmehr von einer Einheit die Rede ist. Diese Einheit ist gegeben, und auf ihr, oder genauer: in ihr, betätigt sich die sie sondernde Vielheit, deren Vollzug die Leistung der Synthesis bedeutet. Auch hiergegen erhebt Dühring seine Stimme, wenn er sagt, dass eine vollendete Zusammenfassung erst durch vorhergegangene Synthesis von Einheiten zu stande gekommen sein kann; dass jedoch in der aktualen Unendlichkeit, wie wir sie als Grundlage der synthetischen Funktion aufstellten, ein Widerspruch für den gesunden Menschenverstand liege, ist nicht ersichtlich. Das Verlangen Dührings, für die aktuale Unendlichkeit, da sie etwas Abgeschlossenes bedeutet, das Ansichsein näher zu signifizieren, ist unberechtigt, da dies, wie er selbst meint, eine Nebenordnung zu neuen Einheiten, also die Vernichtung des Begriffes bedeutete. Weshalb aber die beschränkte Determinationsweise ins Spiel führen bei einem Begriffe, der nimmermehr aus der Anschauung heraus abstrahiert ist? Der Gedanke der aktualen Unendlichkeit, den das Denken selber geformt hat, lässt sich nie in den sinnlich beschränktem Bezirk eines »unverrückbaren Gegenstandes« sperren.

Übrigens schliesst der Begriff der Unendlichkeit in gewisser Beziehung keineswegs den Begriff der Nebenordnung aus, wofür die unendlichen Reihen das vorzüglichste Beispiel geben; nur, dass hier der Begriff der

---

[62]) »Infinita quantitas data evidentissima contradictio in adiecto est.« (Dühring: *De tempore, spatio, causalitate atque de analysis infinitesimalis logica* (Berlin 1861), pag. 35.)

[63]) Vide Dühring: *Natürliche Dialektik*, pag. 114.

Nebenordnung eine andere Bedeutung erlangt hat. Denken wir uns nämlich eine unter bestimmten Gesetzen fortlaufende mathematische unendliche Reihe, so lässt sich trotz ihrer Unendlichkeit eine Unzahl anderer von der selben Unbegrenztheit aufstellen, deren Unendlichkeiten der ersten in ihrer Vollkommenheit nicht den geringsten Abbruch tun. Es ist erstaunlich, dass Dühring diese Tatsache überhaupt nicht in Erwägung gezogen hat, wo er fort und fort daran erinnert, dass die Unendlichkeiten der Logik sich nicht ohne den Begriff der unendlichen Zahlenreihe denken lassen. In der Voraussetzung, dass alle unendlichen Begriffe Möglichkeitsbegriffe sind, sofern die Denkbarkeit des Unendlichen in der Möglichkeit einer unbeschränkten Synthesis besteht, und das Vorhandensein einer solchen Möglichkeit für uns gar nicht diskutierbar ist, gelangt Dühring zu der geschilderten ablehnenden Haltung gegen alles aktual Unendliche. Er berücksichtigt dabei nicht, dass tatsächlich, wie die Arithmetik der unendlichen konvergenten Reihen zeigt, mit der kategorematischen Unendlichkeit von uns fortwährend operiert wird, dass, wenn wir nicht das logisch unberechtigte Verlangen stellen, Regeln, die für einen Bezirk definiert sind, nun auch auf einen andern mit anderen Voraussetzungen übertragen zu dürfen, mit den transfiniten Zahlen gerechnet werden kann.

In seiner *Logik und Wissenschaftstheorie* spricht sich Dühring gegen die Anmassung des Unendlichkeitsbegriffs aus, die dieser dadurch bekunde, dass er in der höheren Mathematik das eigentliche Lebenselement zu sein vorgibt.[64]) Nicht um eine Häufung kleinster Teile handle es sich in der Infinitesimalrechnung, sondern um die Berücksichtigung des Wachstums einer Grösse unter bestimmten Gesetzen. Es komme nicht mehr die algebraische diskrete Zahl schlechthin in Frage, es werde jetzt weit mehr auf den Verlauf der Stetigkeit der Grössenänderung gesehen. »Das sogenannte Stetige muss sich als Wirkliches in einer Zusammensetzung von Teilen auflösen, die in bestimmter Anzahl vorhanden sind.«[65]) Unbeschränktheit hat in der Natur, wie in unserm Verstande den Sinn, dass zwar dem Verfahren des Teilens theoretisch kein Hindernis entgegensteht, dass jede vorliegende Einzeloperation jedoch immer nur eine bestimmte Zahl Teilungen aufweisen darf; unter solcher Berücksichtigung verliert der Unendlichkeitsbegriff, der unter der falschen Vorstellung der Stetigkeit irreführt, seine trügerische Gestalt.

In seiner gewohnten masslosen Weise polemisiert Dühring in den *Neuen Grundmitteln und Erfindungen zur Analysis* gegen die in der Mathematik gebräuchliche Grenzmethode[66]) und gegen den Begriff des unendlich Kleinen. Die Grenzmethode erledige sich von selbst, da sie gar nicht zur Grenze gelange, nämlich vor einer metaphysischen Ungereimtheit, wie es das unendlich Kleine eben darstelle, Halt mache. Gelegentlich diese Zornausbruches wird einem gewissen Göttinger Professor

---

[64]) Vide Dühring: *Logik und Wissenschaftstheorie* (Leipzig 1878), pag. 260.

[65]) Vide Dühring, loc. cit., pag. 269.

[66]) Vide Eugen und Ulrich Dühring: *Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis* (Leipzig 1884), pag. 54 ff.

Gauss, einem Jesuitenlehrer Cauchy, einem Juden Jacobi, jenen Bannerträgern der Wissenschaft, mit Worten übel mitgespielt, und es ist nur ein Trost, dass wenigstens Lagrange ein Zehntel der Dühringschen Gnadensonne geniessen darf. Der Gedanke, von dem auch hier Dühring ausgeht, ist der: »Alles der Zahl nach als tatsächlich vorhanden Gesetzte kann eben nur in bestimmter Anzahl da sein.« Gemäss diesem Gesetz der bestimmten Anzahl ist ihm auch die althergebrachte Auffassung des Stetigkeitsbegriffes eine verfehlte, wenn sie von einem unendlich zahlreichen Gesetztsein von Punkten auf einer Geraden spricht. Nach den scharfen, alle Methoden der höheren Mathematik in Grund und Boden verwerfenden Ausführungen ist man gespannt, das grosse positive Ergebnis der Dühringschen Untersuchungen zu schauen. Nun also: Das unendlich Kleine, will sagen: unbeschränkt Kleine, »ist eine bestimmte endliche Grösse, der jedoch die Eigenschaft wesentlich ist, ohne Schranken kleiner gesetzt werden zu können«.[67]) Dabei ist sie indessen, wie man bisher annahm, nicht variabel, denn den ihr einmal beigelegten Grad von Kleinheit muss sie durch die ganze jeweilig vorliegende Rechnung beibehalten. Die Möglichkeit ihrer Variabilität wird im Widerspruch hierzu jedoch schon im nächsten Augenblick zugestanden, wenn Dühring hinzusetzt, dass jene einmal angenommene kleine Grösse in jedem Moment geändert werden kann, wenn man sich nur jedesmal die Operation unter dieser Grösse wiederholt denkt. In dieser scheinbar originellen Erklärung liegt also eine ganz gewöhnliche Umschreibung des Variabilitätsbegriffes, durch die der Autor seinen Standpunkt selber preisgibt.

Auch gegenüber der Exhaustionsmethode ist Dühring ein strenger Richter. Er meint, dass diese Methode schon im Ausdruck verfehlt sei, wenn sie vorgebe, Grössen erschöpfen zu können, da der Zweck der Sache doch in einer restlassenden Teilung bestehe. Er gebraucht das Bild eines Gefässes und findet es absurd, dieses für ausgeschöpft zu halten, solange noch ein einziger Rest in ihm ist. Hier liegt die Absurdität eher auf seiten des Kritikers; denn nach ihm dürfte bis zum heutigen Tage kein Gefäss ausgeschöpft sein. Das Wesentliche im Begriff des Schöpfens besteht unseres Erachtens darin, dass wir einmal aufhören müssen, zu schöpfen, dass Überreste, die nicht mehr herausgeschöpft werden können, von uns negiert werden; so verhält es sich auch mit dem Gefäss der Gleichung. Wenn also Dühring sagt: »Man misst und will zu Ende ausmessen; aber man kann es nicht«,[68]) so setzen wir hinzu: aber man will es auch nicht; wenn der Rest so klein ist, dass er mit dem in Frage kommenden Masse nicht mehr festgestellt werden kann, so wird er für den Wert des Resultates eben belanglos, da auch dieses mit dem gleichen Masse gemessen wird. Die weise Mahnung: »Statt von Ausschöpfung, sollte man stets nur von unbeschränkt approximativer Ausschöpfung reden«, ist also sehr überflüssig: welchem Mathematiker wäre es eingefallen, dieser Methode einen andern Wert beizulegen?

---

[67]) Vide Dühring, loc. cit., pag. 67.
[68]) Vide Dühring, loc. cit., pag. 72.

Es ist bei Dühring nicht verwunderlich, dass einer breit angelegten, mitunter durchaus verwerflichen polemischen Argumentation ein meist sehr mageres Resultat entspringt.[69]) Alles, was er gegen das aktual Unendliche anführt, könnte mit ein paar Worten erledigt sein. Solches betont auch Cantor mit Recht in seinen *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. In ähnlicher Weise übt O. Schmitz-Dumont an der Definition des unendlich Kleinen Kritik, indem er die Gegensetzung des Unendlichen zum Endlichen, die zu einem Ganzen nimmermehr zusammengeschlossen werden können, für einen logischen Fehlschluss erklärt; der Gegensatz sei nicht das Unendliche, sondern das Nichts. So rügt er, wie Dühring, seine Anwendung in der Mathematik, die als exakte Wissenschaft einen alle Bestimmbarkeit negierenden Begriff nicht in sich aufnehmen dürfe.[70]) Als eindeutiges Symbol bezeichnet die o in der ideellen Zahlenreihe eine ganz bestimmte Stelle, ihre Vieldeutigkeit tritt bei vielen arithmetischen Operationen hervor. »Der Inhalt dieses Gebildes ist das Nichts, seine Form aber ist eine ebenso bestimmte, wie diejenige jeder andern Zahl.«[71]) Was das unendlich Grosse betrifft, so spricht Schmitz ihm jeden logischen Wert ab, da eine quantitative Bestimmbarkeit seines Begriffes unmöglich ist; Schmitz warnt bei der Behandlung des Unendlichkeitsbegriffes vor einer Analogie mit den unendlichen Dezimalbrüchen, wie sie beispielsweise bei der Irrationalität auftreten. Hier handle es sich um die Begrenzung eines Quantums, »bei dem ∞ soll aber eine Quale begrenzt werden, nämlich die Qualität *Quantum*.«[72]) Ohm hatte definiert: »Die unendlich kleine Zahl ist nie im Sein vorhanden, sondern nur im Werden begriffen; ihre Existenz kann aber nicht bezweifelt werden.« Gegen diese Erklärung des unendlich Kleinen als eines Grössenbegriffes polemisiert Schmitz-Dumont. In der Infinitesimalrechnung, so meint er, handle es sich keineswegs um reine Quantitätsbestimmungen, wie in der Elementarmathematik; nicht Grössen

---

[69]) Gegen die »Widersprüche und Unmöglichkeiten« der Dühringschen Auffassung des Unendlichkeitsproblems führt Friedrich Engels in seiner Streitschrift *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft* (Zürich 1886) eine Reihe von Gründen ins Feld. Was Engels indessen selber an Positivem gibt, ist ebenso wenig stichhaltig; es bewegt sich im wesentlichen in den Bahnen der Hegelschen Dialektik, die ihn zum Beispiel veranlasst, in der Integration der Differentiale die »Negation der Negation« zu sehen (vide loc. cit., pag. 128 ff.). Er nennt die Infinitesimalrechnung »die Anwendung der Dialektik auf mathematische Verhältnisse« und macht sich über die Mathematiker lustig, die für das »vermittelst der formellen Logik« unbeweisbare Leibnizsche Differential kein Verständnis hatten und nur »knurrend« nachgaben, »nicht, weil sie überzeugt waren, sondern, weil es immer richtig herauskam«; er zeigt damit aber nur, dass ihm die Bemühungen der Mathematiker im abgelaufenen Jahrhundert unbekannt geblieben sind, die Prinzipien der Infinitesimalrechnung anders zu fundieren, weil es eben nicht »immer richtig herauskam«. Der Triumph der Hegelschen Dialektik über die »formelle Logik« war von kurzer Dauer.

[70]) Vide O. Schmitz-Dumont: *Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie* (Berlin 1878), pag. 231.

[71]) Vide Schmitz, loc. cit., pag. 196.

[72]) Vide Schmitz, loc. cit., pag. 197.

sollen bestimmt werden, vielmehr Veränderungen, nicht der durchlaufene Weg, sondern die Art und Weise des Durchlaufens.[73]) »Das Gesetz der Bewegung soll logisch dargestellt, nicht gemessen werden.« Wie indessen Schmitz sich vorstellt, »dass der Ausdruck jenes Gesetzes zum späteren Ausmessen der Bahn dienen kann«, ist nicht verständlich, selbst wenn wir versuchen, den Begriff der Veränderung in einen Zusammenhang mit dem Begriff der Grösse zu bringen. Eine veränderliche Grösse wird von Schmitz nicht mehr quantitativ aufgefasst. Die Integration ist also für Schmitz auch nicht die Summation kleiner Teilchen, da sich aus Nullen kein Quantum zusammensetzen lassen könne, sie ist »ein Aufsteigen von einem Komplex allgemeiner Eigenschaften zu einem solchen von spezielleren«. Die ganze Bedeutung der modernen Analysis liegt nach Schmitz in der logischen Verbindung der Begriffe *Qualität* und *Quantität,* von Grösse und Richtung.

3

Ein trostloses Umhertappen, ein Suchen nach leeren Worten kennzeichnet ganz besonders diese Epoche in der Wandlung unseres Begriffes, wo man es allmählich aufgibt, die Unbestimmtheit eines Gedankens als eine Gelegenheit zu metaphysischen Tollkühnheiten anzusehen; dagegen auch mit Hilfe einfachen Nachdenkens zu einem positiven Resultat noch nicht hat gelangen können. Auch hier, wie auf anderen Entwickelungsstufen, ist die Fülle der Denker, die sich mit dem Problem beschäftigen, eine so enorme, dass, wenn auch von vornherein von einer historischen Aufzählung aller Autoren nicht die Rede sein kann, die Auswahl der wichtigsten und Richtung gebenden keine leichte Aufgabe ist. In dessen ist wohl der Weg der Entwickelung von vornherein klargestellt. Aus dem Wust metaphysischer Hirngespinste sich mühsam hervorarbeitend, wird die Frage allmählich in den Niederungen trivialer Skepsis landen, um sich dann einen neuen Aufschwung in einer Verbindung durch Skepsis gereinigter metaphysischer und empirischer Beiträge zu geben.

Nachdem wir das öde Gebiet der Metaphysik verlassen haben, wenden wir uns zunächst einem Denker zu, der für die nächste kurze Epoche wohl als der zuständigste gelten kann und auch viele der übrigen im Prinzip kennzeichnet: Wilhelm Wundt.

Der Begriff eines absoluten Unendlichen ist nach Wundt, wie er in seiner *Logik* ausführt, zum Beispiel vorhanden, wenn man »den Durchschnittspunkt zweier Parallellinien in unendliche Entfernung verlegt«. In solcher Beziehung sei ihm durch die als gegeben gesetzte Parallellität der beiden Linien ein ganz bestimmter Ort im Raume zugewiesen; man kann ihn nicht »als einen Punkt denken, dem die Linien ohne Ende zustreben«. Die Gewinnung eines absoluten Unendlichen hält Wundt auf dem Wege arithmetischer Operationen für ausgeschlossen, da wir durch unendliche Summationen immer nur veränderliche Grenzbegriffe er-

[73]) Vide Schmitz, loc. cit., pag. 237.

halten. Der Begriff des absoluten Unendlichen sei immer erst durch ein sich von den Operationen befreiendes Postulat zu erhalten.

In seinen *Essays* nimmt Wundt Stellung zu der Auffassung der Antinomieen durch Kant, und er fühlt sich, wie leicht zu verstehen, durch deren Ergebnis nicht befriedigt; so rollt er das Thema noch einmal auf, wobei er auf dem Zwang, sich für Thesis oder Antithesis zu entscheiden, aufmerksam macht.[74]) Die Lösung Kants, die die Welt als in unserm Bewusstsein, als unsere Erscheinung hinstellt, hat nach Wundt uns keineswegs von den Widersprüchen gerettet: »Ob wir also Raum und Zeit für Dinge ausser uns oder für Vorstellungen in uns halten, solange wir sie überhaupt für die Formen halten, in denen das Bild der Welt, das wir in uns tragen, sich darstellt, kommen wir um die Frage nicht herum, ob diese Welt eben in diesen Formen, in denen wir sie auffassen, endlich oder unendlich zu denken sei.«[75]) Das Problem der Unendlichkeit bleibt bestehen, ob wir uns innen oder aussen mit ihm herumschlagen.[76]) Eine andere Frage erhebt sich für Wundt: ob denn der Begriff des Unendlichen, wie er in Thesis und Antithesis auftritt, beide Male in dem gleichen Sinne verstanden wird. »Das Resultat dieser Erwägungen ist ein unzweideutiges. Nie können wir die Welt als eine in Raum und Zeit begrenzte, und nie als ein fertig gegebenes unendliches Ganze betrachten. Wohl aber ist sie für uns ein unendlich Werdendes, ein immerwährend unserem Denken Aufgegebenes. Dies ist die Unendlichkeit. Von dem Gedanken der werdenden Unendlichkeit aus verschwinden nun alle jene Widersprüche, welche die Idee des Unendlichen in ihrer Anwendung auf Zeit und Raum hervorzubringen schien. Zwar ist es uns nicht gestattet, in der Zurückverfolgung der Weltereignisse jemals einen Anfang der Zeit anzunehmen; aber es ist uns ebenso wenig erlaubt, in irgend einem Augenblick eine Ewigkeit abgelaufen zu denken. Wir würden ja damit eine vollendete Unendlichkeit setzen.«[77])

Das Bestreben, über die unbegrenzte Kette kausaler Prozesse determinierend herauszutreten, nennt Wundt eine Vermengung der Erkenntnisprobleme mit ethischen Forderungen.[78]) Die Symbole o und ∞ werden als Zahlen zwar nicht anerkannt, sie besitzen indessen unter gewissen Verhältnissen den Charakter wirklicher Zahlen. Weiterhin wendet sich Wundt gegen die von Cantor begründeten transfiniten Zahlen, die jenseits einer absolut bestimmten Grösse $\omega = \infty$ liegen und nicht mehr unter dem Gesetze der Kommutation stehen. Er macht dabei auf die mit dem gesunden Menschenverstand unvereinbare Paradoxie aufmerk-

---

[74]) Vide Wilhelm Wundt: *Essays* (Leipzig 1886), pag. 68.

[75]) Vide Wundt, loc. cit., pag. 70.

[76]) »Sobald die vorsichtige Überlegung dem kühnen Flug der Idee zu folgen vermag, kann die Überzeugung nicht ausbleiben, dass selbst hier, wo sich der Gedanke aller Fesseln der Erfahrung entledigt glaubt, die vollendete Unendlichkeit nicht anders zu fassen ist, als indem der endlose Fortschritt als ein vollendeter, also das Unendliche selbst doch wieder als ein Endliches gedacht wird.« (Wundt, loc. cit., pag. 87.)

[77]) Vide Wundt, loc. cit., pag. 72.

[78]) Vide Wundt: *Logik* (Stuttgart 1906), 1. Bd., pag. 404.

sam, dass eine unendliche im Endlichen beginnende Gerade in ihrer Quantität vergrössert oder unverändert bleibt, je nachdem wir eine Strecke ihrem unendlichen oder endlichen Abschluss hinzufügen. Die von Cantor gemachten Unterscheidungen des Infiniten und Transfiniten, deren Unterschied in ihrer Erzeugungsweise bestehe, seien lediglich logische Postulate, wenn auch die Mathematik unter der hypothetischen Annahme ihrer Abgeschlossenheit auf ihnen eine Theorie begründen dürfe.

Während also noch Wundt nicht umhin kann, der unendlich grossen Zahl unter gewissen Bedingungen den Charakter einer Zahl zuzuerkennen, nimmt Sigwart hierin eine völlig ablehnende Haltung ein, wenn er erklärt, dass das Wesen der Zahl mit dem Begriff seiner Einheit verknüpft, diese Einheit im Unendlichen aber nicht nachweisbar sei: »Der Begriff der Unendlichkeit hat logisch nur den Sinn, dass im Begriffe der Zahl selbst keine bestimmte Grenze für den Fortgang des Zählens liegt. Von einer unendlichen Zahl aber zu reden, als ob man damit wie mit endlichen Zahlen rechnen könnte, führt notwendig zu Widersprüchen.«[79]) Als »äusserste Spitze der Teilung« eines Dinges erkennt Sigwart das Atom, das alle Ausdehnung verloren hat, unräumlich, »absolut einheitlich ist«; Atomdinge können unmöglich als unräumlich genommen werden, will man nicht, wie J. Rehmke in seiner Rezension des Sigwartschen Werkes[80]) bemerkt, »das Beste, was dem Dinge, sei es klein, sei es gross, anhaftet, die Anschaulichkeit des Dinges« preisgeben.

4

Langsam geht nunmehr die Steigung in der Entwickelungskurve unseres Begriffes vor sich. Wir können sie zum Beispiel bei H. Rickert wahrnehmen. Die Mannigfaltigkeit der uns affizierenden Dinge ist, wie Rickert darlegt[81]), empirisch, wie logisch unendlich; diese Unendlichkeit wird auch nicht durch die Annahme einer endlich beschränkten Materie aus der Welt geschafft, da die Unendlichkeit von Zeit und Raum eine unbegrenzte Möglichkeit von Gestaltungen dieser Materie darstellt. Rickert unterscheidet zwischen extensiver und intensiver Mannigfaltigkeit, je nachdem wir die Totalität des Weltganzen oder die Unerschöpfbarkeit eines Dinges im Divisionsprozess im Auge haben.

Nach Bergmann[82]) fasst der Begriff der unendlich grossen Zahl unendlich viele Begriffe unter sich, was aus der Vorstellung der komplexen Zahlenebene hervorgeht; deshalb sind zwei mit verschiedenen Richtungskoeffizienten behaftete unendlich grosse Zahlen unvergleichbar; dagegen gibt es in einer bestimmten Zahlenreihe nur zwei unendlich grosse Zahlen von entgegengesetzten Vorzeichen. Man kann nicht »von einer

---

[79]) Vide Christoph von Sigwart: *Logik* (Freiburg 1893), 2. Bd., pag. 52.

[80]) In der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 107. Bd. (1896), 1. Heft.

[81]) Vide Heinrich Rickert: *Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung* (Freiburg und Leipzig 1896).

[82]) Vide J. Bergmann: *Über den Begriff der Quantität* in der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 120. Bd. (1902), 1. Heft.

unendlich grossen Zahl zu einer noch grösseren dadurch gelangen, dass man zu ihr eine endliche Zahl oder sie selbst [?] addiert, und nicht zu einer kleinern dadurch, dass man eine endliche Zahl von ihr abzieht.« Eine unendliche Zahl liegt nicht selbst in der Zahlenreihe, wenn sie auch mit der endlichen Zahl durch logische Operationen notwendig verbunden ist. »Es gibt insbesondere in der endlosen reellen Zahlenreihe ebensowenig eine Zahl von unendlicher Grösse, wie in dem unendlichem Raume einen Punkt, dessen Entfernung von einem gegebenen Punkt unendlich gross wäre, oder in der unendlichen Zeit einen Punkt, der von dem Punkte der Gegenwart durch eine unendlich grosse Zeitstrecke getrennt wäre.« Das Prädikat der Unendlichkeit hat für die Zahl nur Sinn, sofern diese als subjektiv aufgefasst wird, während es widerspruchsvoll wird, sobald man eine solche Zahl in einen Bezug mit zu zählenden Dingen bringt. Unendlichkeit im gewöhnlichen Sprachgebrauch hat lediglich den Sinn, »dass die Gesamtheit gewisser Dinge überhaupt nicht durch den Begriff der Menge zusammengefasst werden kann.« Von einem Grössenunterschied zwischen zwei unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnung will Bergmann nichts wissen. Die Zweiheit ist auch im unendlich Kleinen vertreten, denn eine Besonderung ist in diesem Begriffe ebensowenig denkbar. »Um einen Grössenunterschied zwischen d und d^2 behaupten zu dürfen, müsste man zuerst zeigen, wie sich überhaupt Gradunterschiede in dem Unendlichkleinsein denken liessen, und das könnte nur in der Weise geschehen, dass man diejenige Bestimmtheit einer Zahl d angäbe, die jemand kennen musste, bevor er urteilen könnte, d sei im Vergleich mit allen endlichen Zahlen unendlich klein.« Die Objektivität der unendlich kleinen Zahl wird von Bergmann bestritten, da jede Zahl, die grösser als o ist, noch unendlich viele kleinere Zahlen zwischen sich und der Null aufweisen muss. Ja, sogar ihre subjektive Realität wird verneint, da sie aus keiner logischen Operation mit endlichen Zahlen hervorgeht, wie ja auch die Infinitesimalrechnung lediglich mit endlich, eventuell unendlich grossen, niemals mit unendlich kleinen Zahlen zu tun hat. Denn der Differentialquatient, der eine unbegrenzte Annäherung zweier Differenzen an Null darstellt, ist stets eine endliche, niemals eine unendlich kleine Zahl. »Die Symbole dx, dy etc. bezeichnen nach dieser Auffassung für sich allein gar nichts.«

VIERTER ABSCHNITT

Die Entwickelung des mathematisch Unendlichen zum Transfiniten

1

Es ist schon angedeutet worden, dass das Unendliche auch in seiner Gestalt als aktual Unendliches sich von verschiedenen Seiten Eingang in die Mathematik zu schaffen gewusst hat. Mit der Aufstellung der Aktualität im allgemeinen ist indessen noch keineswegs darüber entschieden, ob sie nur dem unendlich Kleinen oder dem unendlich Grossen oder beiden zugleich zukomme. Zur Einführung in diese Untersuchungen sei hier zunächst die Besprechung einer kleinen, doch lehrreichen Arbeit E. Drehers über diesen Gegenstand eingeschoben.

Dreher stellt in seinem Aufsatz, der sich *Antinomieen und Paralogismen* betitelt[83]), Untersuchungen über das Wesen des Differentials an, das von den Mathematikern als eine unendlich kleine, unteilbare Grösse aufgefasst werde. Diese Meinung äussert er gelegentlich einer Behandlung des Zenoschen Problems der Bewegung, und er sieht einen gewaltigen Widerspruch in der Annahme von Differentialen höherer Ordnung. Zwischen dem Dilemma des »nulldimensionalen« Euklidischen Raumpunktes und dem Fluxionsbegriff in der Mechanik entscheidet er sich für den letzteren, weil er »unsern Denken einleuchtend« erscheint, und »weil nur diese Axiome ihre vollständige Bestätigung durch die theoretische Mechanik finden, womit wir nicht verkennen, dass der Euklidische Punkt eine ähnliche denkgemässe Berechtigung im Raume besitzt, wie die Gegenwart in der Zeit«. Immerhin, meint Dreher, bestehe zwischen den Prämissen der niederen und höheren Mathematik in Sachen des Unendlichkeitsbegriffes eine Antinomie, »wie die Hypothese, dass es eine *causa sui* gibt, und dass der Kausalnexus nach der Vergangenheit zu sich ins Unendliche erstreckt«. Diese Drehersche Auffassungsweise, die in der Definition gipfelt: »Das unendlich Kleine ist eine abgeschlossene, wenngleich durch die kleinste Zahl nicht mehr zu beziffernde Grösse, während das unendlich Grosse seinem Begriffe gemäss eine unabgeschlossene Grösse ist«, erfährt durch L. Fischer[84]) ihre Zurechtweisung. Fischer

[83]) Erschienen in der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 98. Bd. (1891), 2. Heft.

[84]) In der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 99. Bd., 2. Heft.

macht zunächst auf die Absurdität aufmerksam, das unendlich Kleine als etwas Abgeschlossenes zu bezeichnen, und weist die naiven *circulos in demonstrando* nach, die Dreher mit seinem unteilbaren unendlich Kleinen dem Leser vorführt.

Aus diesem Streit sei hier nur die Frage herausgehoben, ob die unendliche Reihe im stande sei, irgend wann den ihr vorgeschriebenen präzisen Abschluss zu erreichen. Dreher sieht wohl, worauf es in diesem Problem ankommt; denn er erkennt ganz richtig das Unmögliche eines Abschlusses bei einem unendlichen Wachstum. An einer andern Stelle beruft er sich daher einfach auf die Erfahrung, die uns den abgeschlossenen Wert unendlicher Reihen zeige und uns zwinge, den letzten Rest ganz zu nehmen. »Das letzte Glied . . . würde mithin in Bezug auf seine Unteilbarkeit ein mathematisches Symbol eines demokritischen (physischen) Atoms, das heisst ein Sinnbild eines Atoms der heutigen Naturwissenschaft sein.«[85]) Hier tritt wieder die unpräzise und unklare Auffassungsweise Drehers hervor; denn bei einer unendlichen Reihe von einem letzten Gliede zu sprechen, das unteilbar ist, bedeutet eine Absurdität. Wie steht es denn mit dem vorletzten Gliede? Auch auf diese Verirrung Drehers hat L. Fischer die passende Antwort. Die Reihe stellt eben lediglich eine immer näher kommende Annäherung an den Grenzwert dar. Oder, wie es in einer Abhandlung über Cohens Philosophie der Mathematik ausgedrückt wird, »die Zahl ist der Repräsentant einer Tat, einer Vollendung, die Reihe das Schema des zu vollziehenden Verfahrens; die Zahl gibt das Was, die Reihe das Wie der Methode an«.[86])

In der eben geschilderten Dreherschen Auffassungsweise erblicken wir den Versuch, in der Mathematik das potential unendlich Grosse in dem unvollendeten Prozess der Reihe, das aktual unendlich Kleine in dem Differential zu entdecken und zu begründen; dieser Versuch muss in der Art, wie er hier durch Dreher veranstaltet wird, als gescheitert betrachtet werden, indessen ist schon das Fernhalten jeder metaphysischen Sehnsucht lobenswert. Der Gedanke, dem aktual Unendlichen Bürgerrecht in der exakten Wissenschaft zu verleihen, ist ein kühnes Wagnis, wenn man bedenkt, dass gerade die führenden Geister in der Mathematik von einer Einführung aktual unendlicher Grössen nichts wissen wollten. So spricht sich G a u s s in einem Briefe an Schumacher, der vom 12. Juli 1831 datiert ist, gelegentlich eines Diskurses über die Parallellinien gegen jede Heranziehung des aktual Unendlichen in die Mathematik aus: »Was nun aber Ihren Beweis betrifft, so protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine *façon de parler*, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen, als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen

---

[85]) Vide Eugen Dreher: *Die Grundlagen der exakten Naturwissenschaft im Lichte der Kritik* (Dresden 1900), pag. 35.

[86]) Vide Rudolf Odebrecht: *Hermann Cohens Philosophie der Mathematik* (Berlin 1906), pag. 38.

verstattet ist.«[87]) Eine Reihe weiterer Zeugnisse führt Cantor in seinen gesammelten Abhandlungen *Zur Lehre vom Transfiniten* an.[88])

2

Wir sind hier mit Absicht der chronologischen Reihenfolge untreu geworden; denn wollten wir die Drehersche Auffassung in diesem Sinne betrachten, so müssten wir in ihr eher einen Rückschritt, als einen Fortgang erblicken. Indessen möchten wir in jener doch immerhin unbedeutenden Arbeit nicht etwa eine Etappe in der Wandlung unseres Begriffes verstanden wissen; nur ein Beispiel der Entwickelung zur höhern Auffassung kann sie geben, eine passende Vermittelung zwischen zwei einander konträr gegenüberstehenden abgeschlossenen Anschauungen.

Soweit das Unendliche im Gewande mystischer Verheissungen in die Methode der Infinitesimalrechnung hineinzudringen droht, muss es auf seine bescheidenen Ansprüche, Wegweiser der Forschung zu sein, nicht Erzeuger, aufmerksam gemacht werden. Wird jedoch eine völlige Ausmerzung des Begriffes aus der Mathematik erzielt, wird die wissenschaftliche Verwendbarkeit der Aktualität des Unendlichen ein für allemal von der Hand gewiesen? Hier kommen nun für den exakt Denkenden in erster Linie jene Ergebnisse in Betracht, zu denen Cantor mit Hilfe erstaunlicher Meditationen über das Unendliche gelangt ist, jener Wissenszweig, der in überraschend kurzer Zeit zu einem umfangreichen Gebiet angewachsen ist: die Mengenlehre. Wir werden uns später den Cantorschen Forschungen selber zuwenden, soweit deren Besprechung im Rahmen einer philosophischen Abhandlung und mit Rücksicht auf eine gedrängte und übersichtliche Darstellung angängig ist. An dieser Stelle sei zunächst eines Autors Erwähnung getan, der, trotz aller theosophischen

---

[87]) Vide Carl Friedrich Gauss' Werke, 8. Bd. (Göttingen 1900), pag. 215.

[88]) Cauchy behauptet in seinen *Sept leçons de physique générale* (Paris 1868) die Unmöglichkeit der aktual unendlichen Zahlen. Er scheint nach Cantor »zu dieser für einen Mathematiker höchst seltsamen [?] Spekulation« durch das Studium der Schriften des Kardinals G. S. Gerdil gekommen zu sein, auf dessen Abhandlung *Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanents, soit successifs* (abgedruckt in der Gesamtausgabe seiner Werke (Rom 1806), 4. Bd., pag. 261 ff.) er sich bezieht. Die gleiche Ansicht vertritt der Abbé Moigno in seiner Schrift *Impossibilité du nombre actuellement infini; la science dans ses rapports avec la foi* (Paris 1884), ebenso Tongiorgi, *Institutiones philosophicae*, 2. Bd. (Brüssel 1869), in der Form »Multitudo actu infinita repugnat« (pag. 172). Und andere mehr. Das Schlimme ist, dass diese Autoren die Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen zur Stütze von Glaubenslehren benutzen, wodurch ihre wissenschaftliche Unbefangenheit *eo ipso* getrübt wird. Indessen macht sich, wie wir im folgenden bald sehen werden, auch bei den Anhängern der aktualen Unendlichkeit der gleiche religiöse Eifer geltend. Wenn dieses überaus verfehlte Bestreben sich auch dadurch nicht auf beiden Seiten aufheben kann, so kann es andrerseits auch nicht gegen die eine oder andere der beiden Parteien ins Feld geführt werden. Es wird daher wohl, unbeschadet der Empfindungen des einzelnen, bei einer kühlen kritischen Betrachtung bleiben müssen.

Spekulation, dem Begriffe des aktual Unendlichen doch in anerkennenswert exakter Weise gerecht zu werden sucht, und dessen Deduktionen, obgleich sie ziemlich weit über den Bezirk dieses Abschnittes hinausragen, dennoch an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben dürfen: bemüht sich doch auch Cantor, wo es irgend angängig, die Interessenfrage der Metaphysik bei allen mathematischen Fundierungen niemals ausser acht zu lassen.

Von dem Bestreben geleitet, zu einer ungetrübten Erkenntnis der Unendlichkeit Gottes zu gelangen, geht Gutberlet daran, das aktual Unendliche in seiner Gegebenheit nachzuweisen.[89]) Er weist zunächst die »erbärmlichen Trugschlüsse« der geometrischen Methode Spinozas vollständig zurück und tritt überhaupt gegen jeden Pantheismus auf, der in bedauerlicher Begriffsverwechselung »das durch seine intensive Vollkommenheit unendliche Wesen« mit der Unendlichkeit des Seins identifiziere. Die beiden Elemente im Begriff des Unendlichen werden von Gutberlet näher untersucht, und dabei zeigt sich ihm, dass das potential Unendliche, für dessen Realität sich so viele philosophische Schriftsteller eingelegt haben, ohne die aktuale Unendlichkeit schliesslich gar nicht zu denken sei, da die letztere als Vorbedingung aller Wirksamkeit jedes gedanklichen Prozesses erst gesetzt werden müsse.[90])

Auf die verschiedenen Einwände, die gegen das aktual Unendliche geltend gemacht worden sind, geht Gutberlet ausführlich ein. So wehrt er sich zunächst gegen den Verdacht, als habe er mit der Realität einer aktualen Unendlichkeit die Existenz eines körperlichen Behälters angenommen. Er hilft sich aus der Verlegenheit, indem er ein metaphysisches Sein heraufbeschwört,[91]) indem er »das grenzenlose Gebiet des Möglichen« als den wahren Ort seiner aktualen Unendlichkeit proklamiert. Mit der Möglichkeit ist indessen unseres Erachtens der Teufel durch Beelzebub ausgetrieben; denn die Möglichkeit kann wieder als endliche oder unendliche aufgefasst werden, und sprechen wir von einer Totalität aller Möglichkeiten, so ist der Begriff des aktual Unendlichen wohl umschrieben, aber nicht bestimmt. Zwischen dem reinen Nichts und dem

---

[89]) Vide Constantin Gutberlet: *Das Unendliche, methaphysisch und mathematisch betrachtet* (Mainz 1878).

[90]) Im gleichen Sinne spricht sich auch Cantor in einem noch zu besprechendem Aufsatz (*Mitteilungen zur Lehre von Transfiniten*) gelegentlich einer Polemik gegen Herbart und dessen Anhänger aus. Während die Herbartianer nur das potential Unendliche anerkennen, nennt Cantor im Gegensatz hierzu dieses das uneigentlich Unendliche und stellt ihm das eigentlich Unendliche das aktual Unendliche gegenüber. Dass der obengenannten Klasse von Philosophen der Begriff der Transfiniten niemals klar werden konnte, verzeiht Cantor mit der Bemerkung: »non cuivis homini contingit adire Corinthum«; dass er selber mit dem Transfiniten ein »unbestimmtes Bestimmtes« habe bezeichnen wollen, dagegen wendet sich Cantor mit aller Entschiedenheit, und er kommt im Streite gegen Herbarts »wandelbare Grenze« zu dem Resultat, dass jedes potentiale Unendliche als die wandelnde Grenze einen Weg zum Wandeln, also ein Transfinitum, voraussetze; er wünscht dem wanderlustigen Herbartschen Unendlichen Glück auf die Reise über die von ihm fundierte Bahn des Transfiniten.

[91]) Vide Gutberlet, loc. cit., pag. 15.

Existierenden gibt es kein Mittelding, und der Begriff des Möglichen steht zwischen ihnen keineswegs in der Mitte, es kann überhaupt nicht mit jenen Begriffen zusammen rubriziert werden, vielmehr bedeutet es den ausserhalb jener Grenzen stehenden Zeiger, der zwischen Sein und Nichtsein zittert. Möglichkeit wäre überdies Potentialität. So steht also das Argument auf sehr schwachen Füssen.

Der zweite oft erhobene Einwand, dass eine unendliche Grösse, die eine andere um ein Etwas übertreffe, doch ihren Namen wohl mit Unrecht trüge, ferner die zum Beispiel von Tongiorgi gemachte Bemerkung, dass es auf einer unendlichen von einem Punkte nach einer Richtung gezogenen Graden irgendwo eine Stelle in der Endlichkeit geben müsse, von der aus der kleinste Schritt ins Unendliche führe, und deren fadenscheinige Natur für jeden Verständigen auf der Hand liegt, werden von Gutberlet unter Betonung des Unterschiedes der Grenzen bei einer einseitig unendlichen Strecke mit Scharfsinn widerlegt und durch Beispiele aus der Arithmetik *ad absurdum* geführt.

Es empfiehlt sich nicht, länger auf die negative Seite der Gutberletschen Unendlichkeitslehre einzugehen, die das potential Unendliche ein für alle Mal verwirft, das »nur eine Beziehung unseres Denkens zu den Dingen«[92]) ausdrücke, das die durch unsern unzureichenden Verstand vorgenommene Verstümmelung des kategorematischen Unendlichen bedeute. Letzteres können wir uns nach Gutberlet annähernd fasslich machen, indem »wir uns eine Realität denken und in ihr die Einschränkung leugnen«. Mit diesen leeren Worten beginnt bereits wieder das uralte Dilemma, an dem bisher der menschliche Geist laborierte; und wenn Gutberlet sich damit tröstet, dass er die Lösung dessen, was er in seinen eigenen Worten nicht versteht, einer extramundanen Gottheit zumutet, so ist uns mit einer derartigen unwissenschaftlichen Resignation wenig geholfen. Es liegt auf der Hand, dass ein so leibhaftiger *deus ex machina* selbst bei den tollsten Einfällen hervorgezaubert werden kann, dass nicht nur jeder Widerspruch, ja schliesslich auch jeder Nonsens in einem Wesen von unendlicher Intensität der Konzeption seine Erledigung fände. Alle Undenkbarkeit wird so in einer konstruierten Gottheit denkbar. Wenn sie nur damit auch für uns denkbar würde! In ziemlich langatmiger Weise führt Gutberlet die unzähligen Möglichkeiten, die dem Auge in allen Wissensgebieten den Blick ins Unendliche gewähren, an, um den Zweiflern am aktual Unendlichen die Fruchtlosigkeit ihrer Bestrebungen zu Gemüte zu führen, um zu zeigen, dass alle Operationen bereits vorgenommen worden seien. An dem Punkte jedoch, wo wir etwas Positives von ihm erwarten, zieht er sich in den Nebel einer göttlichen Intelligenz zurück, beschwört den heiligen Thomas und verbreitet sich mit staunenswerter Naivetät über die näheren Eigenschaften, die der Unendlichkeitsbegriff in seiner hypothetischen Intelligenz besitzt.[93])

Wie zu erwarten, geht Gutberlet, um das Vorhandensein des aktual

---

[92]) Vide Gutberlet, loc. cit., pag. 25.
[93]) Vide Gutberlet, loc. cit., pag. 45.

Unendlichen in der Mathematik nachzuweisen, von dem in der neueren Mathematik herrschend gewordenen Grenzbegriff aus. Man versteht hier bekanntlich unter einer unendlichen Grösse eine Variable, die über respektive unter jede angebbare Grenze hinauswächst. In diesem Hinauswachsen ins Unbegrenzte sieht nun Gutberlet bereits das aktual Unendliche, sofern mit Rücksicht auf eine beliebig anzunehmende Gleichung in dieser ein Wert anzusetzen ist, der tatsächlich über alle Grenzen hinausgewachsen ist, also bereits kategorematischen Charakter angenommen hat. Als positiven Wert für das aktual unendlich Kleine sieht sich Gutberlet gezwungen, die Null anzunehmen, und er sagt: »Wenn die unendlich kleine Grösse nicht wirklich o geworden wäre, so liesse sich ein Kleineres, als sie, nämlich o angeben.[94]) Das Verhältnis zwischen der Null und der Unendlichkeit ist für ihn, wie es scheint, Gegenstand metaphysischer Spekulationen. Er meint, es wäre $\frac{1}{\infty} = o$; er meint dies mit aller Bestimmtheit, er wehrt sich gegen den Schein einer blossen Annäherung und gibt dem vorsichtigen Ausdruck $\lim \frac{1}{\omega} = o$ den Laufpass. Wollen wir aber durchaus derartige vage Ausdrücke in unsere Betrachtung ziehen, so wäre doch zunächst zu fragen, was denn zum Beispiel überhaupt $\frac{1}{o} = \infty$ bedeute, wenn o das aktual unendlich Kleine darstellt. Nun ist es unserm Verstande zwar zugänglich, eine Strecke oder Zahl durch einen Bruch, dessen Nenner einen selbst kategorematisch unendlich grossen Wert besitzt, zu vergrössern. In diesem Falle würde der Nenner dieses Bruches mit dem Zähler des ganzen Ausdruckes multipliziert werden. Lassen wir jedoch den Nennerbruch bis zu seinem aktualen Wert zusammenschrumpfen, so ist die Heraufholung des Nenners nicht mehr möglich. Die Division einer Zahl ist also schlechterdings ein Nonsens. Wie gar eine endliche Zahl durch eine, wenn auch aktual unendlich grosse, Zahl geteilt o ergeben soll, womit gesagt wäre, dass eine Zahl durch unendliche Teilung vernichtet werden könnte, das ist uns völlig ein Rätsel. Der Gedanke ist wohl richtig, dass ein aktual unendlich Kleines ein aktual unendlich Grosses voraussetzt, dass das erstere indessen die Null sei, ist ein offenbarer Trugschluss; dieses Zeichen ist lediglich der rechnerische Ausdruck für das absolute Nichtsein, für die Abwesenheit alles etwa zu Setzenden, und sollte es auch nur im Keime in Frage kommen. Dass die Null gelegentlich sogar als Realität bezeichnet wird, ist erstaunlich.

Nicht weniger irrtümlich ist die Annahme, dass zwischen einem zahlenmässigen Ausdruck und seiner ins Unendliche fortgesetzten reihenförmigen konvergenten Zerlegung eine genaue Identität in dem Sinne existiere, dass die Reihenentwickelung als aktual unendlich zu denken sei. Gerade die Reihenentwickelung weist alle Kennzeichen des unbeschränkt möglichen Werdens, der Potentialität, auf. Die Position des Gleichheitszeichens ist in diesem Falle durchaus symbolisch aufzufassen, der exakteste Mathematiker treibt fortwährend diesen »argen Missbrauch mit dem

[94]) Vide Gutberlet, loc. cit., pag. 55.

Gleichheitszeichen«, und selbst Gutberlet scheut sich nicht, zum Beispiel die Identität $\pi = 3{,}14159265\ldots\ldots$ aufzustellen. An dem Beispiele $2 = 1{,}999\ldots$ (*in inf.*) lässt sich am deutlichsten die Paradoxie der Gutberletschen Behauptung zeigen. Denn mögen wir die rechtsstehende Dezimalzahl noch so weit verlängert denken, den Abschluss, den erst die Addition einer unendlich kleinen Einheit bringt, werden wir nicht finden. Drückten beide Seiten das selbe aus, so wäre mit einer solchen Identität nichts gesagt. Der Sinn der Gleichung, die gerade etwas innerlich Verschiedenes in äusseren Einklang bringen soll, wird von Gutberlet nicht verstanden.

Sehr merkwürdige Schnitzer begegnen uns in der Gutberletschen Diskussion über das unendlich Kleine. Er staunt zunächst über das Rätsel, dass bei einer Rechnung mit unendlichen Grössen ein unendlich Kleines niederer gegenüber einem höherer Ordnung vernachlässigt werden dürfe; er fragt: »Ist es wohl möglich, dass vermittelst eines unendlich grossen Fehlers die wichtigsten und überraschendsten Sätze . . . . . gefunden und bewiesen werden konnten?«[95]) Der »unendlich grosse Fehler« scheint uns lediglich von Gutberlet begangen zu werden; denn wenn er bedächte, dass Unendlichkeiten stets relativ aufgefasst werden müssen, dass also ein Unendliches niederer Ordnung einem Unendlichen höherer Ordnung gegenüber tatsächlich ein unendlich Kleines wird, wenn auch dieses seinerseits wieder einer tieferen Ordnung gegenüber unendlich gross ist, so würde er sich nicht zu dem Ausspruch verleiten lassen, dass in der Rechnung »häufig ein Unendliches (sc. unendlich Grosses) weggelassen« wird. Noch weniger ernst kann wohl seine Erklärung des von ihm unverstandenen Rätsels genommen werden, wenn er an einem ergötzlichen Beispiel dartut, dass man mitunter 3 Pferde gegen 5 Ochsen »vernachlässigen« kann.[96]) Mit welcher Naivetät durch die verschiedene Bedeutung des Begriffes *vernachlässigen* Paralogismen gezimmert werden, ist verwunderlich.

Bei der Diskussion des Wesens des Differentials kommt Gutberlet nach längerer, hier nicht zu besprechender Polemik gegen die verschiedenen herrschenden Anschauungen zu dem Ergebnis, dass das, was unter einer Rücksicht aktual unendlich, also 0, ist, unter einer anderen sehr wohl etwas sein kann.[97]) So schleicht sich also unvermerkt ausser dem tatsächlichem absoluten aktual unendlich Kleinen ein relatives unendlich Kleines ein; und das relative Nichts ist von Positiven als einem tausendfältig fruchtbaren Gebiet umgeben, von dem aus die relativen Nichtse vergleichbar werden sollen: »Denn ich kann recht gut schätzen, dass keine Tugend schlimmer ist, als keine Weisheit.«[98]) Was dieses Beispiel und vorzugsweise der Begriff *schlimmer* hier zu tun hat, ist nicht erfindlich. Mit jener grandiosen Paradoxie also, dass das relative Nichts von seiner positiven endlich grossen Seite etwas, von seiner negativen

[95]) Vide Gutberlet, loc. cit., pag. 69.
[96]) Vide Gutberlet, loc. cit., pag. 70.
[97]) Vide Gutberlet, loc. cit., pag. 81.
[98]) Vide Gutberlet, loc. cit., pag. 82.

endlich kleinen Seite nichts ist, will Gutberlet die Rätsel des Differentials lösen. Wie er dazu kommt, dem relativen Nichts eine endliche Seite aufzuoktroyieren, die doch erst nachgewiesen werden soll, ist unverständlich; es zeigt, dass er in den Geist der Infinitesimalrechnung nicht völlig eingedrungen ist. Wenn man übrigens seine mystisch verworrene Ausdrucksweise von einer endlichen Seite des Nichts kritisch und prosaisch überblickt, so sagt Gutberlet eine längst bekannte Tatsache aus, eben, die er erklären wollte.

Wir müssen es uns versagen, auf die als Beleg der Gutberletschen Argumentation herangezogenen Beispiele aus der Infinitesimalrechnung einzugehen. Dass die Geistesuniversalität, mit der Leibniz Philosophie und Mathematik gleicherweise umfasste, und auf deren Notwendigkeit Gutberlet so oft für die Lösung dieser schwierigen Probleme hinweist, bei ihm keineswegs in gleichem Masse ausgebildet ist, ist eben nur verzeihlich. Immerhin wäre der Gutberletsche Beitrag zum unendlich Kleinen als ein löblicher Versuch zu bezeichnen, wenn nicht der grösste Teil seiner Untersuchungen von einer ziemlich aufdringlichen, ja den letzten Teil seines Werkes ganz in Anspruch nehmenden Theodicee beeinflusst wäre.

In seiner *Logik und Erkenntnistheorie* setzt Gutberlet den Begriff des Unendlichen ausserhalb der Grenzen der Evidenz,[99]) wobei er hinzufügt, dass, wenn auch die Evidenz als Kriterium der Wahrheit anzusehen ist, doch nicht das, was nicht evident sei, notwendig falsch sein müsste. »Was wir mit Gewissheit behaupten können, ist in Wahrheit nichts gegen das, was wir nicht wissen.«[100]) Wir werden so durch die Erwägung, dass Wahrheiten niemals mit einander in Widerspruch stehen dürfen, dazu gezwungen, einzugestehen, dass es wirkliche Geheimnisse für unsere Vernunft gebe.

Wenn Gutberlet in seiner erstgenannten Schrift an Stelle der unendlichen Zahl die unendliche Menge setzt, um die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen nachzuweisen, so erklärt sich Cantor mit dieser Ausführung nicht einverstanden, »denn unendliche Zahl und Menge sind unlösbar mit einander verknüpft, gibt man die eine auf, so hat man kein Recht mehr auf die andere«. Ferner hat Cantor an den Gutberletschen Ausführungen auszusetzen, dass »im Begriffe der unendlich gedachten Grösse der Ausschluss aller Möglichkeit der Vermehrung« liege. Bei dem Unterschied, den, wie wir bald sehen werden, Cantor zwischen den beiden Äusserungen des aktual Unendlichen, dem Transfiniten und dem Absoluten, macht, ist sein Einwand verständlich; wie das Endliche, so ist auch das Transfinite, das für Cantor allein wissenschaftlichen Wert hat, unbegrenzt vermehrbar. Dagegen rühmt Cantor an Gutberlet, dass er »auf die Abhängigkeit des potential Unendlichen von einem zu Grunde liegenden aktual Unendlichen hinweist«: einen Gedanken, den auch Cantor

---

[99]) Vide Gutberlet: *Logik und Erkenntnistheorie* (Münster 1892), pag. 170.

[100]) Vide Gutberlet, loc. cit., pag. 271.

selbst, sofern das potential Unendliche mathematisch verwendbar sein soll, an verschiedenen Stellen mit aller Schärfe betont.

Wir verweilen nicht länger bei diesen, wenn auch löblichen, so doch für die mathematische Wissenschaft unfruchtbaren Spekulationen Gutberlets über das aktual Unendliche.[101]) Vielmehr wenden wir uns jetzt einem anderen Forscher zu, der in gewisser Hinsicht als ein Vorläufer Cantors aufgefasst werden kann.

3

Der Theologe, Philosoph und Mathematiker Bolzano leitet seine Untersuchung der Unendlichen von den denkbar einfachsten Voraussetzungen aus zunächst zu dem Begriff einer Vielheit, die dadurch entsteht, das wir zu einer Einheit der Art *A* andere der gleichen Art hinzufügen; auf diese Weise entstehen endliche Vielheiten oder Zahlen, während wir »eine Vielheit, die so beschaffen ist, dass jede endliche Menge nur einen Teil von ihr darstellt, eine unendliche Vielheit nennen«.[102]) Diese Definition unendlicher Vielheiten führt uns weiterhin zum Verständnis des Unendlichen selber, das wir als »eine Beschaffenheit von Vielheiten« erkennen, da die Eigenheit des Unendlichkeitsbegriffes durch die Natur unendlicher Vielheiten erklärt wird. Denn wir nennen eine Grösse unendlich gross, wenn sie in ihrer Vielheit jede Anzahl von Einheiten übersteigt, unendlich klein, wenn jedes endliche Vielfache dieser Grösse die angenommene Einheit nicht übersteigt. Ein wesentliches Merkmal unendlicher Grössen besteht darin, dass sie absolut nicht einander gleich zu sein brauchen, wenn ihre Mengen, aus denen sie bestehen, paarweise gleich sind; dieses trifft erst bei Übereinstimmung beider Vielheiten zu.[103]) Die Paralogismen des Unendlichkeitsbegriffes verschwinden, sobald sie gemäss der ihnen zukommenden Charakteristik aufgefasst werden. Das Unendliche, wie es vielfach in der Mathematik Verwendung findet, wie es von Cantor als uneigentlich Unendliches bezeichnet wird, das potential Unendliche ist eine gedankliche Hilfsvorstellung und kann niemals als konstant gedacht werden.

Die Polemik Bolzanos richtet sich einmal gegen die Lehre Hegels, sodann in der Hauptsache gegen folgende vier üblichen Auffassungen vom Unendlichen: 1. das Unendliche als Grenze eines unbegrenzten Wachsens, 2. die Aktualität des Unendlichen, 3. das Unendliche als das kein Ende Habende, 4. das Unendliche als das Jenseits jeder angebbaren Grösse.[104]) Der Widerspruch liegt bei der ersten Auffassung in der Definition bereits offen zu tage, und der von Cauchy und anderen Mathematikern vertretene

---

[101]) Der Streit für und wider das aktual Unendliche kann am eingehendsten in der Polemik zwischen Gutberlet und Isenkrahe betrachtet werden, die man in der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 86. und 88. Bd., abgedruckt findet.

[102]) Vide Bernard Bolzano: *Paradoxieen des Unendlichen* (Beriln 1899), pag. 9.

[103]) Vide Bolzano, loc. cit., pag. 35.

[104]) Vide Bolzano, loc. cit., pag. 9 ff.

Gedanke einer veränderlichen Grösse erledigt sich für Bolzano bei der Erwägung, dass diese »eigentlich nicht eine Grösse, sondern der blosse Begriff, die blosse Vorstellung von einer Grösse ist, und zwar eine solche Vorstellung, die nicht eine einzige, sondern eine unendliche Menge von einander verschiedenen, in ihrem Werte, das heisst in ihrer Grossheit selbst sich unterscheidenden Grössen unter sich befasst«. Wodurch dann der fragliche Begriff zu einer *contradictio in adiecto* wird. Was die zweite Definition anlangt, so lehrt die Mathematik, die unendliche Grössen potenziert, die einseitig unendliche Gerade vergrössert, das Gegenteil einer bestimmten Unendlichkeit. Vollends geht der fehl, der, wie es die dritte Definition anzeigt, sich in äusserlicher Weise an die Bestandteile des Wortes hält. So kann erstens die jeder Grenze ermangelnde Kreislinie schwerlich von unserm Verstande als unendlich betrachtet werden, während es andererseits zu bemerken ist, »dass es gar viele Gegenstände gebe, die unleugbar begrenzt sind und dabei doch als Grössen angesehen werden, die zu den unendlichen gehören«. Das Angebbare endlich kann als Mögliches oder nur als nicht Widerspruchsvolles aufgefasst werden; die letztere Vorstellung erledigt sich wiederum von selbst; »denn eine Grösse, die grösser sein soll, als eine jede, die sich nicht widerspricht, müsste auch grösser, als sie selbst, sein«. *Angebbar* im Sinne von *möglich* deutet auf Wirklichkeit. Der Begriff der Unendlichkeit wird aber zumeist im Hinblick auf Gegenstände behandelt, bei denen von Wirklichkeit zu reden gar nicht angängig ist, und so wäre auch dieser Versuch, das Unendliche zu bestimmen, vergeblich. Endlichkeit und Unendlichkeit bedeuten »eine gewisse innere Beschaffenheit der Gegenstände«; so kann *angebbar* in der Bedeutung eines in unserer Erfahrung Gegebenseins nicht an dieser Stelle verwendet werden, denn die Grösse des Gegenstandes, um die es sich handelt, hat mit unserer Wahrnehmung nichts zu tun.

4

Wir kommen nunmehr zu dem originellen Schöpfer der Mengenlehre, zu Georg Cantor. Von diesem Gelehrten wird eine Erweiterung des Komplexes der endlichen Zahlen über das Unendliche hinaus angestrebt. Seine Versuche nach dieser Richtung hat er hauptsächlich in seinen *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* niedergelegt. Er unterscheidet zwischen dem alle gestellten Grenzen überschreitenden uneigentlich Unendlichen, das als eine variable Grösse in der Infinitesimalrechnung eine so grosse Rolle spielt, und dem eigentlich Unendlichen.[105])

[105]) Cantor setzt sich in einem an G. Enestrom gerichteten und in seiner Schrift *Zur Lehre vom Transfiniten* abgedruckten Brief über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das aktual Unendliche in Gegensatz zu Cauchy, Gerdil und Moigno. In diesem Brief heisst es: »Alle sogenannten Beweise wider die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen sind, wie in jedem Fall besonders gezeigt und auch aus allgemeinen Gründen geschlossen werden kann, der Hauptsache nach dadurch fehlerhaft, und darin liegt ihr *πρῶτον ψεῦδος*, dass sie von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdringen, während die unendlichen

Letzteres tritt in der Funktionentheorie immer dort auf, wo es sich darum handelt, die Beschaffenheit der Funktion in einem gewissen Umkreise um einen Unendlichkeitspunkt zu erforschen, einen unendlichen Punkt, und wobei die Fixierung des Unendlichen in einem bestimmten Ort durch das völlig unveränderte Verhalten der Funktion motiviert wird. »Dabei zeigt es sich, dass das Verhalten der Funktion in der Nähe des unendlich fernen Punktes genau dieselben Vorkommnisse darbietet, wie an jedem anderen, im Endlichen gelegenen Punkte, so dass hieraus die volle Berechtigung dafür gefolgert wird, das Unendliche in diesem Falle zu einem ganz bestimmten Punkt gelegt zu denken. Das Unendliche in dieser bestimmten Form ist das eigentlich Unendliche.«[106])

Dass der Begriff des aktual Unendlichen nicht den der Unvermehrbarkeit ausschliesse, hebt Cantor ausdrücklich hervor, obwohl er diese Annahme im Laufe der ganzen Philosophiegeschichte verbreitet findet. Um hier Abhilfe zu schaffen, teilt er das aktual Unendliche wiederum in zwei Klassen: in ein vermehrbares aktual Unendliches oder Transfinitum und in ein Unvermehrbares oder Absolutum. Er legt dar, »dass sich seit Kant die falsche Vorstellung unter den Philosophen einbürgert, als sei das Absolute die ideale Grenze des Endlichen, während in Wahrheit diese Grenze nur als ein Transfinitum, und zwar als das Minimum alles Transfiniten gedacht werden kann. Ohne ernste kritische Vorerörterung wird der Unendlichkeitsbegriff von Kant in dessen *Kritik der reinen Vernunft* in dem Kapitel über die Antinomieen der reinen Vernunft an vier Fragen behandelt, um den Nachweis zu führen, dass sie mit gleicher Strenge bejaht und verneint werden können. Es dürfte kaum jemals, selbst bei Mitberücksichtigung der pyrrhonischen und akademischen Skepsis, mit welcher Kant so viele Berührungspunkte hat, mehr zur Diskreditierung der menschlichen Vernunft und ihrer Fähigkeiten geschehen sein, als mit diesem Abschnitt der kritischen Transzendentalphilosophie.«[107]) Von dem Absoluten unterscheidet sich das eigentlich Unendliche vornehmlich dadurch, dass es durch Zahlen ausdrückbar ist, die für »eine unbegrenzte Stufenleiter von bestimmten Modis« in diesem transfiniten Gebiet stehen. Die Möglichkeit einer derartigen Erkenntnis der Gesetze unendlich grosser Zahlen sieht Cantor in der »unbegrenzten Anlage« des Verstandes für die stufenweise Bildung solcher Mächtigkeitsklassen. Das Absolute ist als jede menschliche Fassungs-

---

Zahlen doch andrerseits, wenn sie überhaupt in irgend einer Form denkbar sein sollen, durch ihren Gegensatz zu den endlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht konstituieren müssen, dessen Beschaffenheit von der Natur der Dinge durchaus unabhängig und Gegenstand der Forschung, nicht aber unserer Willkür oder unserer Vorurteile ist.«

[106]) Vide Gutberlet: *Das Problem des Unendlichen* in der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 88. Bd., 2. Heft.

[107]) Vide Cantor in dem oben zitierten Brief an Eneström. — Cantor übersieht, dass es sich in der Kantischen Antinomieenlehre lediglich um die Anwendung des Unendlichkeitsbegriffs auf das Gegebene der Erfahrung handelt, dass seine transfiniten Zahlen dort also gar nicht in Betracht kommen können.

kraft überschreitend und sich keiner mathematischen Determination unterwerfend, von jeder Spekulation fernzuhalten; »wogegen das Transfinite nicht nur das weite Gebiet des Möglichen in Gottes Erkenntnis erfüllt, sondern auch ein reiches, stets zunehmendes Feld idealer Forschung darbietet und meiner Überzeugung nach auch in der Welt des Geschaffenen bis zu einem gewissen Grade und in verschiedenen Beziehungen zur Wirklichkeit und Existenz gelangt, um die Herrlichkeit des Schöpfers, nach dessen absolut freiem Ratschluss, stärker zum Ausdruck zu bringen, als es durch eine bloss »endliche Welt« hätte geschehen können.«[108]) Dass sich der Mathematiker hier zum Anwalt des Theologen aufwirft, hätte man nicht erwartet. Die reine Freude über die Entdeckung der überendlichen Zahlen musste billigerweise die Phantasie des Gelehrten beflügeln; ob indessen die Nutzbarmachung dieses Gedankens für die Religion fördernd auf den Gang der Untersuchung wirken kann, ist mehr als zweifelhaft.

Zum Unterschied von anderen missglückten Versuchen mit unendlichen Zahlen erklärt Cantor, dass die kleinste jener transfiniten Zahlen ω, die grösser, als alle endlichen Zahlen, ist, »gänzlich ausserhalb der endlosen Zahlenreihe 1, 2, 3 usw.« liegt. Ein Maximum aller endlichen Zahlen existiert nicht, das Minimum aller überendlichen Zahlen ist eben dieses ω. Es liegt in den Cantorschen Untersuchungen somit ein bedeutsamer Schritt in der Erforschung des Unendlichen, wenn er den kühnen Gedanken fasst, von dem einen unendlich fernen Punkt der komplexen Zahlenebene ausgehend eine unendliche Reihe wohl unterschiedener, in gesetzmässiger Beziehung unter einander und zu den endlichen ganzen Zahlen stehender, überendlicher Zahlwerte zu schaffen.

Cantor erkennt die kritischen Verdienste Bolzanos an, er geht über ihn, nach positiven Ergebnissen strebend, indessen hinaus und nimmt als Wegweiser in jenen Bezirken zwei Begriffe: den der *Mächtigkeit* und den der *Anzahl*, die er für jeden erspriesslichen Fortgang der Forschung selbst in der Logik und Erkenntnistheorie als durchaus notwendig betrachtet. Es ist zum Zwecke des Verständnisses der Cantorschen Unendlichkeitslehre notwendig, hier seine Definition seiner beiden Grundbegriffe einzuschieben. Auf die genauere Durchbildung seines Gedankens an dieser Stelle einzugehen, ist unmöglich; wir müssen auf die in verschiedenen Werken und Zeitschriften von Cantor selbst und anderen niedergelegten Ausführungen verweisen.[109]) Man kann diesen Entschluss, aus einer philosophischen Besprechung jede tiefere mathematische Argumentation auszuschliessen, nur vorsichtig nennen, denn, wie Gutberlet sagt, »die

---

[108]) Vide Cantor: *Zur Lehre vom Transfiniten* (Halle 1890), pag. 48.

[109]) In erster Linie das Hauptwerk: Cantors *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Leipzig 1883); dann verschiedene Abhandlungen in den *Acta mathematica* (2., 4., 7. Bd.), in den *Mathematischen Annalen* (15., 17., 20., 21., 23. Bd.), im *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (77., 84. Bd.); ferner auch eine Studie P. Tannérys *Le concept scientifique du continu: Zénon d'Elée et G. Cantor* in Ribots *Revue Philosophique*, 20. Bd.

mathematische Abstraktion geht in diesen Abhandlungen so hoch, dass es nur wenige geben wird, die dem Verfasser zu folgen im stande wären«.

Jede Menge wohl unterschiedener Dinge bildet ein einheitliches Ding. Nun bedeutet Mächtigkeit einer Menge die Kardinalzahl, die, abgesehen von der Beschaffenheit, wie von der Reihenfolge der Elemente, eine Reihe von Dingen ausdrückt, und die somit jeder wohldefinierten Menge zukommt. Ferner sind zwei Mengen äquivalent, wenn sie sich successive eindeutig in ihren Elementen zuordnen lassen; alle äquivalenten Mengen fallen unter eine Mächtigkeitsklasse. »Somit ist die Mächtigkeit einer Menge *M* zu definieren als die Vorstellung dessen, was allen der Menge *M* äquivalenten Mengen und nur diesen und daher auch der Menge *M* selbst gemeinsam ist.« Zwei wohlgeordnete, das heisst in der Succession der Glieder eindeutig bestimmte Mengen haben ferner die gleiche Anzahl, wenn in diesen beiden Mengen stets je zwei Elemente einander entsprechen. Die Bedeutung des Begriffes der Anzahl wird dadurch klar, dass, wenn auch die beliebig geänderte Succession bei einer endlichen Menge immer ein und die selbe Anzahl ergibt, dies bei unendlichen Mengen keineswegs der Fall zu sein braucht. Cantor stellt nun auf Grund dieser Voraussetzungen verschiedene Klassen von transfiniten Zahlen auf, deren Elemente in ihrem innern Charakter durch die Anzahl der vorhergehenden Menge repräsentiert werden; das heisst, die Anzahl einer bestimmten Mächtigkeitsklasse ist ein bestimmtes Glied der nächsten und nur dieser Klasse. Das Schema des Gedankenganges ist dieses, dass der Begriff der Anzahl, der den ausschliesslichen Hintergrund der endlichen Zahlen bedeutet, sich im Unendlichen ausserdem noch in einen Nebenstrom, den Begriff der Mächtigkeit, abzweigt. »Und steige ich wieder herab vom Unendlichen zum Endlichen, so sehe ich eben so klar und schön, wie die beiden Begriffe wieder Eins werden und zusammenfliessen zum Begriffe der endlichen ganzen Zahl.« Unendliche Mannigfaltigkeiten lassen sich einem Teile ihrer selbst zuordnen, während dieses bei endlichen Inbegriffen nicht möglich ist. Für die eigentümliche Charakterstik unendlicher Mannigfaltigkeiten führt E. Cassirer ein treffendes, Galilei entnommenes Beispiel an.[110]) Der Inbegriff aller Quadratzahlen ist dem Inbegriff aller natürlichen Zahlen äquivalent, denn es kann jeder natürlichen Zahl eindeutig eine Quadratzahl zugeordnet werden, trotzdem dass die Reihe der natürlichen Zahlen die Reihe der Quadratzahlen als Teil in sich enthält. »Nennt man nun jede Menge, die sich der Reihe der positiven ganzen Zahlen, gemäss irgend einer Vorschrift, eindeutig zuordnen lässt, »abzählbar«, so entsteht die Frage, ob alle uns bekannten Mannigfaltigkeiten unter diesen Begriff fallen, ob sie, mit anderen Worten, unter einander und mit der natürlichen Zahlenreihe sämtlich von gleicher Mächtigkeit sind, oder aber, ob sich andere, »höhere« Mächtigkeiten definieren lassen.« Nun zeigt sich, dass die Erweiterung der Zahlenreihe durch die gebrochenen rationalen und diejeni-

---

[110]) Vide Ernst Cassirer: *Kant und die moderne Mathematik* in den *Kantstudien*, 12. Bd. (1907), 1. Heft.

gen irrationalen Zahlen, »die die Wurzel irgend einer algebraischen Gleichung bestimmten Grades mit ganzzahligen positiven oder negativen Koeffizienten sind«, auf keine neuen Mächtigkeitsklassen führt. Solches tritt jedoch bei der Hinzunahme der transzendenten Zahlen ein. »Es zeigt sich, mit anderen Worten, dass die Gesamtheit der reellen Zahlen, die zwischen zwei reellen Werten α und β liegen — so nahe diese übrigens sein mögen —, sich niemals durch irgend eine einfache unendliche Reihe ausdrücken und erschöpfen lässt.«

Auf die in kürzester Zeit zu einem unfassenden Gebiet angewachsene Mengenlehre hier näher einzugehen, verbietet der Rahmen der Arbeit[111]). Das Kontinuumproblem, das im Mittelpunkt aller Untersuchungen steht, und das die Frage stellt, wieviel verschiedene Klassen gleicher Mächtigkeit man aus reellen Zahlen bilden kann, besitzt weit mehr mathematisches, als philosophisches Interesse. Die Meinungsverschiedenheiten, die durch mancherlei Widersprüche in dieser Wissenschaft entstanden und noch keineswegs beigelegt sind,[112]) lassen sie fürs erste noch nicht als geeignet zur Lösung des Unendlichkeitsproblems erscheinen, nach der der kritische Philosoph sucht, der sich nicht damit zufrieden gibt, das alte Rätsel durch Aufstellung neuer Symbole zu verschleiern. Wohl aber gibt sie der weitern Forschung neue Anregungen.

Als ein wesentlicher Punkt in der Auffassung Cantors mag hier noch die Tatsache Erwähnung finden, dass er sich ganz entschieden gegen die Existenz aktual unendlich kleiner Grössen ausspricht. Er weist die naheliegende Vermutung von der Hand, dass das Dasein aktual unendlich grosser Zahlen die Annahme aktual unendlich kleiner Zahlen bedinge, meint vielmehr gerade mit Hilfe der ersteren die Unmöglichkeit der letzteren beweisen zu können; als veränderliche, beliebig klein, doch niemals von irgend einer Bestimmtheit anzusetzende Hilfsgrössen dienen sie nur zur Vereinfachung der Rechnung, wofür schon ihr Verschwinden aus dem Endresultat spreche.

Mit dem Cantorschen Transfiniten hat die Entwickelung des Unendlichkeitsbegriffes ein Maximum erreicht, das für die mathematische Forschung eine bedeutende Perspektive eröffnet. Hat sich das Transfinite als ein wirksamer Faktor in der Mathematik erwiesen, so lässt sich hoffen, dass eine Nutzbarmachung dieses Gedankens für metaphysische Interessen eine überaus lohnende sein würde. Schon die von Cantor ausgenutzte Tatsache, dass der Wert einer unendlichen Reihe nicht mehr

---

[111]) Wir verweisen auf A. Schönflies' Bericht über die Mengenlehre im *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*, 8. Bd. (1900).

[112]) Wie Cantor, hat auch G. Veronese den Versuch gemacht, über das Gebiet der endlichen Zahlen hinauszugehen, wobei er jedoch, was Cantor nicht getan, auch die negativen ganzen Zahlen in Betracht zog; er gelangte dabei zu Resultaten, die von denen Cantors durchaus abwichen. Gegen die Veronesesche Theorie brachte Wilhelm Killing in einer Abhandlung, die im Vorlesungsverzeichnis der Akademie Münster 1895 erschien, Bedenken vor. Veronese antwortete darauf in den *Mathematischen Annalen*, 47. Bd. (pag. 423 ff.), worauf Killing in der gleichen Zeitschrift, 48. Bd. (pag. 425 ff.) replizierte.

von der Reihenfolge der Summanden unabhängig ist, kann mit Erfolg gegen den von Bonaventura geführten, an sich scharfsinnigen Beweis gegen die Anfangslosigkeit der Welt[113]) vorgebracht werden, der da meint, dass der Zahl nach Unendliches nicht mehr in bestimmter Weise geordnet werden kann, und der aus der Ordnung der Himmelskörper den zeitlichen Weltanfang nachzuweisen versucht. Der Einwand ist allerdings ungemein gewichtig und würde bestehen bleiben, wenn nicht das eben besprochene merkwürdige Gesetz jener Regellosigkeit steuerte.

Leider ist es der Lehre Cantors bisher versagt geblieben, in systematischer Weise zu einem philosophischen System verarbeitet zu werden[114]), von dem man schon zufolge seiner sicherlich ihm zukommenden Originalität viel erwarten dürfte.

---

[113]) Vide Cohn: *Geschichte des Unendlichkeitsproblems,* pag. 77.

[114]) Über die geringe Berücksichtigung, die die Cantorschen Untersuchungen von philosophischer Seite gefunden haben, klagt auch Kerry in seiner Studie *Über G. Cantors Mannigfaltigkeitsuntersuchungen* in der *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie,* 9. Jahrgang (1885), 2. Heft.

FÜNFTER ABSCHNITT

Das Unendliche in seinem Verhältnis zur Ethik, Psychologie und Logik

1

Wie kaum ein anderer Begriff, war der des Unendlichen geeignet, sich durch seinen unbestimmten Charakter frühzeitig in dem weiten Gebiete des Glaubens Geltung zu verschaffen, und wir begegnen ihm auf Schritt und Tritt in der blumigen Sprache des poetischen Gemüts. Die Erwartungen und Hoffnungen sowohl, wie die Befürchtungen über die Entscheidung in Sachen des Göttlichen sind im Problem des Unendlichen latent, und der Philosoph, der über jene Fragen Erwägungen anstellt, sieht im Unendlichkeitsbegriffe seine wesentlichste Stütze. Schwerer wohl noch, als im Gebiet der Mathematik, lässt sich hier eine bestimmte geregelte Stufenfolge in der Entwickelung des Problems angeben; und wollten wir unterschiedslos die enorme Fülle theologischer Autoren hier aufzählen oder gar in den Einzelheiten schildern, so wäre einer methodischen Übersicht über die Wandlungen des Begriffs gar nicht gedient. Andrerseits lassen sich auch hier wieder nur die Entwickelungsetappen hinreichend begreifen an der Hand bestimmter Meinungen, die als ganz besonders markant aus dem umfangreichen Komplex ähnlicher Versuche hervorragen. Wir stehen unter dem Bann des Gemüts, sofern wir unsern Begriff in der geschilderten Anwendung auf religiöse Dinge verfolgen wollen. Schon hieraus erhellt, dass wir uns mit dem Betreten des Gebietes der Ethik zugleich bewusst werden müssen, dass hier eine andere Richtlinie in Hinsicht auf eine Fortentwickelung des Problems zu beobachten ist, als bisher. Wir wollen auf dem durch den Glauben bestimmten Weg in diesem Abschnitt ein kleines Stück gehen.

Als ersten Wegstein nennen wir den oben schon mehrfach erwähnten I. H. Fichte, der es unternimmt, den immer und immer wieder auftauchenden, scheinbar durch Vernunftsgründe untilgbaren Widerstreit zwischen potentialer und aktualer Unendlichkeit in einer Gottheit zur Verschmelzung zu bringen. Die göttliche Aseität, als Identität von realer Möglichkeit und Wirklichkeit, »ist ewig, werde- und anfangslos«, ist Einheit wie Unendlichkeit, ohne gleich Absolutes neben sich, also die aktuale Unendlichkeit. Diese aktuale Unendlichkeit involviert insofern

die negative Unendlichkeit, als die Bejahung der unendlichen Einheit durch eine doppelte Negierung, durch die Verneinung aller Schranken gefunden wurde. So sind potentiale und aktuale Unendlichkeit zwei koexistierende Eigenschaften Gottes. »Gott ist, was er ist, eben nicht auf die endliche, beschränkte Weise, wie jede Realität an den endlichen Dingen nur zersplittert und verteilt erblickt wird: seine Natur, sein Denken und Wollen ist »unendlich«, heisst es in dieser Hinsicht.«[115]) Steht der Begriff *ewig* für *zeitschrankenfrei, unermesslich* für *raumschrankenfrei,* so steht die Idee Gottes jenseits von jenen Begriffen. »Gott ist unendlich sich erfüllende Ewigkeit, real sich erfüllender Raum.«[116])

Im Vergleich mit der Fichteschen Auffassung des unendlichen Wesens bedeutet die Ulricische Erklärungsweise eines Weltschöpfers immerhin doch einen beträchtlichen Abweg ins rein Mystische, wenn er das Universum für zugleich begrenzt und unbegrenzt erklärt, wenn also seine ethischen Versuche mit allerhand unkritischen Einflechtungen über die Realität unendlicher Grössen verquickt und durch sie verdunkelt werden. Der Begriff der Unendlichkeit kommt nach Ulrici dem göttlichem Wesen aus dem Grunde zu, weil es das *non plus ultra,* »über das kein Sein und Denken hinaus kann«, darstellt,[117]) weil es, selbst Grenze alles Seins und Denkens, nicht durch ein anderes begrenzt sein kann. Was »an keinem Andern eine Grenze hat, das kann auch nicht in sich selbst beschränkt, an kein bestimmtes Mass der Kraft und Grösse gebunden sein, und insofern ist es unendlich«. Indessen folgt aus der Unendlichkeit und Unbegrenztheit nicht die Mass- und Schrankenlosigkeit; denn die Weltschöpfung und damit die Setzung aller Grenzen und Schranken fordert eine »Selbstbestimmung und Selbstbestimmtheit Gottes«, wobei wir an die innere Begrenztheit des Unendlichen bei Chalybaeus erinnert werden. Da das Setzen von Grenzen die Selbstbeschränkung des Unendlichen postuliert, so bildet sich also ein innerer Zusammenhang zwischen Endlichkeit und Unendlichkeit, der durch die gemeinsame Kategorie der »Grenze oder Schranke überhaupt« gekennzeichnet wird.

Es ist wohl ein löbliches Unternehmen, das Anliegen des Gemüts durch die Gedankengänge der Vernunft unterstützen zu wollen; durch die Tatsache indessen, dass hierbei schlechterdings stets der Wunsch der Vater des Gedankens sein muss, wird es erklärlich, dass derartige aufs Religiöse gerichtete Erwägungen durch die Abirrung ins rein Metaphysische oder zum mindesten durch Konstatierung der offenen Schäden in diesem Gebiete eine trübe Färbung annehmen müssen. In diesem Sinne müssen wir auch noch bei dem in Sachen der Ethik bedeutenden M. Carriere einen gewissen Tiefstand des in Frage kommenden Problems konstatieren.

Als das »Eine Allumfassende, allen Raum und alle Zeit Setzend-

---

[115]) Vide I. H. Fichte: *Grundzüge zum Systeme der Philosophie,* 3. Abt., pag. 382.

[116]) Vide I. H. Fichte, loc. cit., pag. 384.

[117]) Vide Hermann Ulrici: *Gott und die Natur* (Leipzig 1866), pag. 674.

Erfüllende« sieht Carriere das Unendliche an.[118]) In ihm verwirklicht sich die alte eleatische Weisheit des ἓν καὶ πᾶν. »Die Einheit muss sein, weil nur innerhalb derselben Unterscheidung möglich ist, weil in der Allheit die Vielen zur Einheit verbunden sind.« Das also ist der beachtenswerte Grund, aus dem Carriere die aktuale Unendlichkeit des Seienden lehrt. Die Bestimmungslosigkeit des Seins führt zum Nichts; einer solchen Vernichtung widerstreitet aber der Begriff des reinen Seins; deswegen müssen wir das Sein als sich selbst bestimmende, dadurch sich in sich unterscheidende Tätigkeit fassen, als Einheit, die nicht neben dem Vielen steht, sondern alles Mannigfaltige in sich setzt und auf einander bezieht.[119]) Aus der differenzierten Einheit des Unendlichen folgt alle Endlichkeit als Selbstposition des Seins; so ist es nicht nur »alles aus sich entfaltende und in sich begreifende Tätigkeit«, es ist schliesslich selbst das Endliche; und insofern seine »eigene Wesenheit in dem Gewirkten fortbesteht«, bestimmt es seine eigene Natur. Wir finden in diesen Gedanken unverkennbare Anklänge an den pantheistischen Evolutionismus des Cusaners: die Begriffe der *complicatio* und *explicatio* sind in gleicher Weise verarbeitet; auch die Endlichkeit der Dinge ist eine Konzentration des Alls und in dem Begriff der kontrahierten Unendlichkeit auf die Spitze getrieben. Carrieres Auffassung vom Unendlichen, in der wir einen entschiedenen Monismus zu erblicken haben, ist durchgängig mit einem alle pessimistischen Unterströmungen abwehrenden Ideal-Realismus verquickt. »So ist das All in Wahrheit Eins, ein Kosmos, Entfaltung der Einheit, die ihrer selbst inne wird, die in Unterschied auseinandergeht, um in der Verbindung des Mannigfaltigen das Leben zu verwirklichen, Fürsichsein, Selbstgefühl, Selbstgenuss zu erlangen.«[120])

Dass die berechtigten Ansprüche des Gemüts mit aller Entschiedenheit hervorgehoben werden, darauf kommt es an, wie wir in diesem Abschnitt von vornherein erwähnten. Die kritiklose Schilderung des innern Sichgeltendmachens des Unendlichen unabhängig von jener vernünftelnden Spekulation zu geben und in diesem innern Eindruck die Versöhnung der Gegensätze der Vernunft zu ahnen, das ist die Aufgabe, und zu dieser Läuterung ringt sich die Frage bei P. Carus durch, bei dem die Wandlung des Begriffes, wie er bei I. H. Fichte auftritt, und der dann durch allzu weit abseits führende Spekulation verdunkelt wird, im kleinen noch einmal hervortritt. Dieser Autor findet es in seiner Schrift *Metaphysik in Wissenschaft, Ethik und Religion* unverständlich, dass die reine Vernunft überhaupt zu Widersprüchen gelangen kann, er warnt davor, in dem ganzen Mummenschanz der Antinomieen den unter dem Zwange der vier logischen Kategorieen stehenden Kant ernst zu nehmen, und er sucht Thesis und Antithesis der Antinomieen, die er mittels eines Absoluten unter eine Hauptantinomie zusammenfasst, zu

[118]) Vide Moriz Carriere: *Die sittliche Weltordnung* (Leipzig 1877), pag. 131.
[119]) Vide Carriere, loc. cit., pag. 106.
[120]) Vide Carriere, loc. cit., pag. 415.

einem in sich widerspruchslosen Satze zusammenzuschliessen. »Es gibt etwas Absolutes als Grund der Welt, welches als solches unabhängig von Raum, Zeit und Kausalität ist; obwohl es in der Welt nichts Absolutes gibt, sondern alles als bedingt gedacht werden muss durch Zeit, Raum und Kausalität.« So sieht er, wie Wundt, in der Aufstellung der Widersprüche über das Unendliche nur eine missverständliche Behandlung der in Frage kommenden Begriffe, indem er das metaphysisch Absolute vom Absoluten der Erscheinung trennt. Unendlichkeit und Unendlichkeitsbegriff sind nicht ein und das selbe; sie verhalten sich, wie Carus meint, beispielsweise zu einander wie ⅓ zu dem unendlichen Dezimalbruch 0,3333... »Die Unendlichkeit zu erfassen ist das unerreichbare Ideal des Unendlichkeitsbegriffes.«[121]) Die Realität der Unendlichkeit bleibt trotz des Ungenügens des Unendlichkeitsbegriffes bestehen. »Sie ist bei ihrer Unfasslichkeit ein transzendenter Hauch, der die ganze Welt durchzieht, der in seiner Erhabenheit auf unser Gemüt bald niederdrückend, bald erfrischend und erhebend wirkt.«

Diese letzte Bemerkung bildet einen Höhepunkt in der Entwickelung des Unendlichkeitsbegriffes, sofern es sich um seine Nutzbarmachung für das religiöse Empfinden und um die Stabilisierung ethischer Interessen handelt. Wenn wir überhaupt von einem Abschluss in der ewig auftauchenden Frage des Unendlichen sprechen dürfen, so ist er in der Konstatierung einer Wirkungssphäre des Unendlichen in unserm Gemüt zu suchen. Auf eine solche Vollendung des Problems im Ethischen ist mit Nachdruck von Max Müller hingewiesen worden, dessen Bestreben es ist, das Unendliche in innige und zugleich vernünftige Beziehung zur Religion zu bringen, die er folgendermassen definiert: »Religion ist eine geistige Anlage, welche den Menschen in den Stand setzt, das Unendliche unter den verschiedensten Namen und wechselnden Formen zu erfassen.«[122]) Dass das Unendliche der zureichende Ausdruck für alle Fragen des religiösen Bewusstseins sei, ist ihm aus der Erkenntnis der Vorherrschaft des Endlichen in aller Erfahrungswissenschaft offenbar, der Glaube fängt im Unendlichen an.

Müller will den Begriff des Unendlichen in seinem ganzen Umfange in das Gebiet der Religion hinübernehmen, während er Ausdrücke, wie das *Unsichtbare, Göttliche, Absolute* etc., in irgend einer Weise nicht ausreichend findet. Dass das Unendliche ein negativer Abstraktionsbegriff sei, bestreitet er entschieden: »Wenn das Unendliche nicht schon im Endlichen enthalten ist, so wird es keine Kunst der Welt heraus destillieren.«[123]) Der Begriff des Unendlichen, der in seiner Vollendung natürlich nicht immer im menschlichen Bewusstsein gewesen ist, ist in seinem Keim dennoch in jedem menschlichen Individuum vorhanden, und

---

[121]) Vide Paul Carus: *Methaphysik in Wissenschaft, Ethik und Religion* (Dresden 1881), pag. 31.

[122]) Vide Max Müller: *Einleitung in die vergleichende Religionswissenschaft* (Strassburg 1874), pag. 15.

[123]) Vide Müller: *Vorlesungen über den Ursprung und die Entwickelung der Religionen* (Strassburg 1880), pag. 32.

an ihm wird der Glaube, der das Unendliche in der sinnlichen Wahrnehmung des Endlichen herausfindet, gebildet. Das Unendliche liegt in der wahrgenommenen Endlichkeit ohne Zutun des Verstandes. Schon das Auge empfindet beim Sehen auf einen Punkt rein äusserlich die Gegenwart des Unendlichen, es spürt »den Druck des Unendlichen«. »Anstatt also ein später negativer Abstraktionsbegriff zu sein, ist das Unendliche vielmehr schon in den frühesten Manifestationen unserer sinnlichen Wahrnehmungen mit enthalten.« Und so offenbart sich bereits bei dem prähistorischen Menschen, bei dem Wilden, der auf hohem Berge die Unmesslichkeit der Natur auf sich wirken lässt, der Begriff der Unendlichkeit. So gern wir auch diese Vorstellung als einen Gemüt und Vernunft in gleicher Weise versöhnenden Abschluss der Frage auf ethischem Gebiet begrüssen würden, so muss doch bemerkt werden, dass die grenzenlose Erhabenheit der Natur in ihrer ganzen Würde erst von feiner organisierten Wesen erfasst wird. Und auch von diesen keineswegs stets, sondern je nach der besondern Veranlagung, Geistesrichtung und Gesamtkultur. Bei den Griechen beispielsweise erzählt die Mythologie als Abglanz ihrer allgemeinen Naturauffassung uns nichts von Unendlichkeiten. Der Okeanos, der die Welt umfliesst, gibt uns das zutreffende Bild, unter welcher Beschränktheit sich den Alten die Erscheinungswelt manifestierte. Dies hat auch Cohn in seinem mehrfach zitierten Werk Müller gegenüber einzuwenden. Dass der Begriff der Unendlichkeit von Müller natürlich nicht in dem Sinne eines unendlichen Ausgedehntseins gefasst wird, steht wohl ausser Frage. »Ihm kommt es«, wie Cohn meint, »überhaupt weniger auf diesen abstrakten Begriff an, als auf die Herausbildung des religiösen Abhängigkeitsgefühls, welches er mit einem leicht verständlichen Ausdruck als Abhängigkeit vom Unendlichen bezeichnet.«

2

Wenn schon psychologisch der Prozess der Aufstellung und Entwickelung von Begriffen einer Untersuchung Schwierigkeiten bereitet, so trifft das bei den Ideen noch weit mehr zu. Was sind überhaupt Ideen? Sind sie über die Grenze der Erfahrung erweiterte Begriffe, wie Kant meint, sind sie transzendente Willensnormen, wie sie Herbart auffasste, sind sie endlich überhaupt nur, ebenso wie die Begriffe, gehaltlose Abstraktionen, wie dies zum Beispiel von Waitz betont wird?

Die Überschreitung der einzelnen Empfindung seitens des Verstandes findet, wie Waitz in seinem *Lehrbuch der Psychologie* ausführt, permanent statt, sofern das lediglich diskret Gegebene in der Vorstellung zu einem kontinuierlichen Gesamtbild vereinigt werden muss. Wenn erst einmal zugestanden ist, dass alles Gedankliche, dass sich alle psychischen Funktionen lediglich in Abstraktionen bewegen, dann liegt die Natur der Ideen auf der Hand; »da ihr Wesen eben darin besteht, dass sie die allgemeinen Gesichtspunkte sind, unter welche eine unzählbare

Menge empirischer Tatsachen« fallen,[124]) so sollen sie dem Turmbau der fortwährend sich erweiternden Gedankenkreise zum Abschluss verhelfen; sie sollen gewissermassen das Streben nach jenem Abschluss symbolisieren, den der beschränkte Geist niemals zu erfüllen im stande ist. Das Bestreben, in das Reich der Idee hinauszuwachsen, zeigt sich vornehmlich bei jenen Begriffen, die eine Tendenz zur Reihenbildung besitzen. Die Endlichkeit von Räumen ist den Sinnen zu allernächst gegeben, und auf dem Wege ständiger Abstraktion gelangen wir zum abstrakten Raum, der auf Erfüllung wartet, »weil er selbst erst aus der vielseitigsten Auflassung des Gestalteten sich herausgebildet hat«.[125]) Er ist ein Schema, das durch die Möglichkeit innerer Abgrenzungen allein vor einer absoluten Bedeutungslosigkeit bewahrt wird.

Die bestimmte Tätigkeit des Ziehens unbegrenzter Linien im Raume lässt seine Unendlichkeit als ein positives Prädikat erscheinen, während diese in Wahrheit dem von vornherein verfehlten Versuch entspringt, seine Gestaltlosigkeit in Grenzen einzuschliessen. Ebenso verhält es sich mit der unendlichen Teilbarkeit, die nur den Sinn hat, »dass die Teilung als weit genug fortsetzbar zu denken sei, um der wirklichen Teilung, deren Grenze wir nicht kennen, keine Beschränkung *a priori* vorzuschreiben.«[126]) Beachtenswert ist die Bemerkung Waitz' über die unendliche Teilbarkeit der Zeit. Eine solche sei unmöglich, denn zur Vorstellung eines Gegenstandes muss stets eine gewisse endliche Zeit vergehen, es muss also »ein Maximum der Schnelligkeit unseres Vorstellungsverlaufes« geben. Von der Unterscheidung zwischen wahrer und schlechter Unendlichkeit will Waitz nichts wissen, und er beruft sich dabei auf eine Stelle bei Hobbes, der die Unendlichkeit als allgemeinen Ausdruck für Bestimmungslosigkeit hinstellt. Das Resultat, zu dem Waitz in Sachen des Unendlichkeitsbegriffes gelangt, findet sich in seinen Worten, dass er »ein missglückter Versuch zur Ideenbildung« sei, aus dem Bedürfnis hervorgegangen, die tatsächliche Abschlusslosigkeit zwischen Gedankenreihen auf irgend einem Umwege zu vereiteln;[127]) weder die unendliche Ausdehnung, noch die unendliche Teilbarkeit sind Eigenschaften einer sinnlichen Gegebenheit, also können sie uns niemals als fertige Vorstellungsweisen offenbar werden.

Hatte Waitz gegenüber der unendlichen Teilbarkeit der Zeit einen gewichtigen Einwand zu machen, so meint Volkmann von Volkmar, dass »das Vorstellen des unendlichen Raumes hinter dem der unendlichen Zeit zurückbleibe.«[128]) Bei dem Versuch der Vorstellung eines solchen unendlichen Raumes kommen zwei Funktionen in Betracht: der unendliche Progresseus und der unendliche Regressus, und die abwech-

---

[124]) Vide Theodor Waitz: *Lehrbuch der Psychologie als Naturwissenschaft* (Braunschweig 1849), pag. 608.
[125]) Vide Waitz, loc. cit., pag. 611.
[126]) Vide Waitz, loc. cit., pag. 613.
[127]) Vide Waitz, loc., cit., pag. 615.
[128]) Vide Wilhelm Volkmann von Volkmar: *Lehrbuch der Psychologie* (Cöthen 1894), pag. 91.

selnde Tätigkeit dieser beiden Vollstreckungen stört den Eindruck des Grenzenlosen, was noch durch den in drei Dimensionen auszuführenden Prozess wesentlich verschärft wird. Aus solchen Gründen vollziehen wir den Fortgang zu dem unendlichen Raumbegriff auf die Weise, dass wir die Raumreihe selbst nicht ins Unendliche fortführen, ihr vielmehr »bloss als Multiplikator die unendliche Zeitreihe« vorsetzen.[129]) Volkmann lässt sich gelegentlich dieser Diskussion auf eine interessante Untersuchung über die psychologische Verknüpfung des Raum- und Zeitbegriffes ein. Die Abstraktion der Raumreihen ist eine leichtere, als die der Zeitreihen; dieses Verhältnis wird aber ein umgekehrtes, wenn wir die beiden Prozesse ins Unbegrenzte fortführen. Kleine Zeitreihen ersetzen wir des öftern durch Raumreihen, während wir an die Stelle bedeutend grosser Raumreihen Zeitreihen zu setzen geneigt sind (Wegstunden, Tagereisen etc.). Die Vorstellung eines Progresses *in infinitum* wird nach Volkmann durch die Vorstellung eines Progresses *in indefinitum* ermöglicht; »dafür aber, dass das fortgeführte Messen über die Grenze hinaus ins Unbestimmte verläuft, sorgt schon der Zeitschwindel, der sich alsbald einstellt.«[130]) Versuchen wir, die unendliche Zeitreihe, wie sie über die Zukunft und über die Vergangenheit hinausgeführt ist, in einen Begriff zu fassen, so erhalten wir das Schema der reinen Zeitreihe, die Ewigkeit. Dieser Begriff, der den Versuch bezeichnen soll, das Nacheinander in seinem unbegrenzten zeitlichen Fortgange in seiner Aktualität zu fassen, ist »das Vorstellen eines Vorstellens, das heisst ein Gefühl«.

Mit diesen beiden kurzen Charakteristiken aus dem psychologischen Gebiet wollen wir die Wegzeigung schliessen. Die Bemerkungen, die sich bei beiden Forschern finden, gehören mehr oder weniger in andere, bereits behandelte Abschnitte. Die Ethik durfte mit Recht ihre Stimme in dem grossen Streit um das Problem erheben; ihre Interessen waren grundsätzliche und schwer wiegende. Gilt das gleiche auch von der Psychologie? Darf sich diese Wissenschaft zur Führerin des Denkens aufwerfen, darf sie sich das Recht der Beglaubigung im Denken aufgestellter Ideen anmassen? Sie zählt freilich alle psychischen Inhalte zu ihren Objekten, somit auch die Tatsache der Unendlichkeitsidee. Aber sie hat nur zu konstatieren, was ist, ein Urteil über den Wert oder Unwert der Idee selber vermag sie nicht abzugeben. In den Streit über die Auffassung des Unendlichen kann sie nicht eingreifen, die psychologische Forschung muss in diesem Sinne als unzuständig in unserm Problem bezeichnet werden. »Die Schöpferkraft des Denkens kann dagegen nur von der Logik erst zur Offenbarung gebracht werden«. Dieses Wort Cohens macht uns neue Hoffnungen, dass das metaphysisch Unendliche an einem Punkt landen werde, von dem aus es zu neuen Zielen gelenkt wird. Wir wollen zusehen, wie weit sie in dem Cohenschen System ihre Rechtfertigung finden.

---

[129]) Vide Volkmann, loc. cit., pag. 92.
[130]) Vide Volkmann, loc. cit., pag. 29.

3

Wenn wir es unternehmen, in einer Untersuchung über einen bisher sich fortwährend wandelnden, zu keiner Präzision gelangenden Begriff nunmehr auch dessen Beziehung zur Logik zu betrachten, so scheint damit die Gewissheit gegeben zu sein, dass wir uns weder über den Begriff einer Logik, noch über den Sinn und Wert eines Begriffes im allgemeinen klar geworden sind. Schon in der Fassung des Themas konnte die Parodoxie, die in der Verbindung des exaktesten mit dem unexaktesten Elemente des Denkens besteht, gerügt werden. Und wenn auch die Möglichkeit der Entwickelung bestimmter Begriffe zugegeben würde, so könnte sich die Schärfe der Kritik um so mehr gegen den Gedanken richten, einen Begriff, dessen Analogon in der Wirklichkeit jeder Abgrenzung entbehrt, dennoch in einer aus endlichen prädikativen Bestimmungen bestehenden Definition fassen zu wollen. Aus dem gegebenen Bestand der Logik den Unendlichkeitsbegriff erklären zu wollen, wie dies beispielsweise Trendelenburg getan[131]), ist löblich, führt aber zu keiner neuen Erkenntnis; man landet über kurz oder lang bei den Kantischen Antinomieen, und die Frage ist noch unverändert vorhanden.

Unter solchen Umständen entsteht die Frage, was erreicht werden würde, wenn wir aufhörten, den Begriff als Problem zu sehen, wenn wir das Verhältnis umkehrten, das Unendliche selbst in gewagter Vorwegnahme zu einem Instrument einer vom Fundament aus neuen Logik setzten und aus der Güte der hierbei erzielten Resultate rückwärts einen Schluss auf die Bedeutung, den Umfang und die Fassung des Begriffes zögen.

Diesen Schritt tat Hermann Cohen, und mag das, was in seinem Werke an positiven Ergebnissen niedergelegt ist, an verschiedenen Stellen anfechtbar sein: Tatsache ist, dass Resultate vorliegen, die durchgängig auf der Zugrundelegung des Begriffes des Unendlichen, spezieller des Infinitesimalen, basieren. Somit finden wir noch vor der Schilderung des Problems bei Cohen die Motivierung des Abschlusses unserer Arbeit mit diesem Philosophen in seinem bisher in dieser Konsequenz unerhörten Gedanken der Begründung einer Logik des Infinitesimalen. Cohen unternimmt es, das unendlich Kleine zur Grundlage

---

[131]) Aus dem Identischen, das der menschliche Geist allem Veränderlichen gegenüberstellt, stammen nach Adolf Trendelenburgs *Logischen Untersuchungen*, 1. Bd. (Leipzig 1862), die Wahrheiten der Mathematik, die somit apriorische Wissenschaft ist, stammen insbesondere die Begriffe des unendlich Grossen und unendlich Kleinen. Sie gehen über die Erfahrung hinaus, haben keine Grenze, »sondern drücken das nur gedachte Ergebnis eines ohne Hemmung fortgehenden, Grössen erzeugenden Prozesses« aus; das stetig fortschreitende mathematisch Unendliche kann durch keine Abstraktion aus der Erfahrung gewonnen werden, vielmehr ist sein Wesen und seine Erklärung in dem »Gedanken einer ursprünglichen und darum sich nicht hemmenden Tätigkeit« zu suchen, woraus sich auch die Kantischen Antinomieen befriedigend lösen lassen; nur dürfen wir nicht, wie Kant es getan, die »Gegebenheit« unendlicher Grössen, sei es in Ansehung des Raumes oder der Zeit als mögliche Formen unserer sinnlichen Anschauung auffassen.

aller wissenschaftlichen Methoden zu machen, und sofern diese Methoden wenigstens in ihren Prinzipien in den Umfang der Logik hineinragen, soll es vornehmlich Bestreben dieser Logik sein, jene Grundlage in ihrem Gebiet zu fundieren. Um dem eigentlichen Werk mit grösserem Verständnis gegenübertreten zu können, verlohnt es sich, an dieser Stelle auch Cohens früheren, jenes System einleitenden Ansichten einige Aufmerksamkeit zu schenken.

Reinheit der Erkenntnis ist für Cohen die Hauptsache; diese Reinheit zu erreichen, dazu taugt allein der wissenschaftliche Idealismus, der es sich zur Aufgabe macht, die Grundlagen der Wissenschaft auf diese Reinheit zu prüfen. Erkenntnis aber, sofern sie präzis sein soll, ist allein in einer exakten Methode des Naturerkennens zu suchen, und die Methode, die zu solcher Exaktheit führt, ist die moderne Mathematik. So also wird der Punkt, an dem jede Erkenntniskritik einzusetzen hat, in den Grundbegriffen dieser Methode liegen; vornehmlich wird demnach hierin wieder der alles treibende Faktor, der Infinitesimalbegriff, Problem der Erkenntniskritik sein müssen. Nicht Erkenntnistheorie kommt in Frage, vielmehr Erkenntniskritik; es handelt sich nicht um die Objekte der Erkenntnis, die gewiss immer in der Anschauung darzustellen sind, sondern lediglich um ihre Quellen und Grundlagen, und das Denken ist »nicht minder eine solche Erkenntnisquelle«[132]). Wenn aber Anschauung in dem alten, unreinen, empirischen Sinne gefasst wird, so kommen wir um das Rätsel des unendlich Kleinen nicht herum; denn der Einwand, dass im Grundsatz die beiden Elemente der Erkenntnis, Anschauung und Denken, bereits zu einem anschaubaren Ganzen verbunden sein müssten, ist äusserlich berechtigt, und deshalb führt das Nachdenken zu einem unlösbaren Widerspruch. So bleibt uns nur übrig, den Begriff der Anschauung zu modifizieren, und wir erreichen unsern Zweck, wenn wir darunter die Beziehung des Bewusstseins auf seinen Inhalt verstehen. Dieser Inhalt ist das gegebene X, und das Innewerden dieses X nennen wir Anschauung.[133])

Wenn man lange bemüht war, das unendlich Kleine als einen Grenzbegriff aufzufassen, dessen Eigenschaft Unteilbarkeit repräsentierte, wenn man nach »letzten Diskreten« suchte, um ein Kontinuum zu erschöpfen, so befand man sich nach Cohen hiermit auf Abwegen. Nach einem »Prinzip schöpferischer Kontinuität« muss gesucht, das Negative in dem Begriff der Grenze vereitelt werden. So müssen wir aufhören, den Punkt als den Abschluss der Linie zu betrachten: der Anfang muss er werden. Die Kurven erzeugende Kraft, die im unendlich Kleinen liegt, überwindet die »antike Bedeutung der Grenze«, und das neue Prinzip, das in diesem Prozess wirksam ist, ist die Kontinuität als eine »Grundgestalt der Einheit des Bewusstseins«, die in dieser Eigenschaft als Einheitsgesetz des Bewusstseins mit der Identität auf eine Stufe gestellt wird, deren geheimnis-

[132]) Vide Cohen: *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte* (Berlin 1883), pag. 16.

[133]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 20.

voller Charakter uns in Cohens System der Philosophie noch ausgeprägter gegenüber tritt. Dort wird es überhaupt zum Gesetz der Operationen.

Das Endliche soll erzeugt werden; dazu ist es nötig, »eine Art wissenschaftlichen Seins zu erdenken, welche zunächst nur durch ihren Unterschied vom Endlichen zu charakterisieren ist«.[134]) Hierzu dient die Kontinuität, die, keineswegs eine Abstraktion der Raumanschauung, eine »fundamentale Bestimmung des Denkens« bildet und das Bewusstsein der Sinnlichkeit ausmacht. Soll die antike, diskrete Zahl überwunden werden, soll die Diskretion und die Grenze aus dem Begriff der Einheit verschwinden, ohne dass auch gleichzeitig dieser der Laufpass gegeben wird, so haben wir den der Kontinuität nötig, in dem die quantitative Einheit überwunden wird. Das unendlich Kleine meldet sich als qualitative Einheit, und im engen Verbande mit dem Prinzip der Kontinuität entsteht die neue Zahl der mathematischen Naturwissenschaft, entsteht die infinitesimale Zählung. Immer noch tobt der Kampf um das Unendliche: werden sich die Widersprüche lösen? Cohen bejaht diese Frage. Vom Endlichen sind wir zum Unendlichen gegangen, es lag ein grober Fehler in solcher Induktion; deshalb, wohlan, versuchen wir deduktiv dem Rätsel beizukommen! Die Einheit sahen wir in Diskretion; die Einheit soll fortan die Unendlichkeit bereits in sich enthalten, sie stieg zur Unendlichkeit auf der Leiter der Kontinuität, sie enthält so nicht mehr »diskrete, sondern kontinuierliche Bestimmtheit«.[135]) So entsagt die infinitesimale Einheit dem Begriffe der Quantität, zu dem sie hinleitet; Qualität und Quantität sind in ihr verbunden, und vermöge dessen umfasst sie das ganze wissenschaftliche Sein, wie der Differentialquotient die jeweilige Eigenart der Kurve. »Die Kontinuität ist diejenige Qualität, welche die Quantität der Zahleinheit zum Unendlichkleinen der Realität vertieft.«[136])

Jeder endliche Massstab ist relativ und willkürlich; die Begründung des Gegenstandes erfolgt nach Überwindung der endlichen Zahlen in der intensiven Grösse des unendlich Kleinen. »Das Infinitesimale ist daher Instrument des Naturerkennens in der Bedeutung des Organon, welches die Naturdinge erzeugt und bildet.«[137]) Cohen rügt die Annahme unendlich kleiner, unausgedehnter Massenteilchen, wie sie zum Beispiel W. Weber hat, da die Masse mit dem der Ausdehnung »in ihrem eigenen Begriffe kompliziert ist«, und auch Fechners Korrektur des Massen- zum Materienbegriff kann den Sinn und die Bedeutung der intensiven Realität niemals erreichen. Im Gegensatz zu allen Spekulationen über das Atom, dessen Natur eine eklatante Abhängigkeit von der jeweiligen Hypothese und von dem jeweilig erstrebten speziellen Zwecke hat, ist der Begriff des Differentials »die *conditio sine qua non* eines exakten Verfahrens«. Nicht um willkürliche Abstraktion oder Position eines vagen

---

[134]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 37.
[135]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 39.
[136]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 40.
[137]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 133.

Gedankendinges handelt es sich, die Realität wird im Differentialbegriff begründet, wenn auch *dx* infolge seiner Tendenz zu räumlicher Ausdehnung den Rayon der intensiven Grösse überragt, wenn es auch nur ein Beispiel der Realität ist.

Was das Differential geltend gemacht hat, soll die Wucht des Integrals erhärten. Die Realität wurde vom unendlich Kleinen beansprucht: »Wenn also das Differential die Realität als eine konstituierende Denkbedingung geltend macht, so bezeichnet das Integral das Reale als Gegenstand.«[138]) So geht also der Weg aus dem Schosse der Realität an der Hand des bestimmten Integrals zum Endlichen und legitimiert dieses in seiner Realität; und das Endliche wird umgekehrt als eine Summe infinitesimaler Realitäten gedacht. Ja, zum Trotz gegen jene Einwände, das Differential sei »eine gewagte Abstraktion«, wird das Endliche vielmehr als ein »gewagtes Konkretum« bezeichnet, »gestützt höchstens durch eine sinnliche Auffassung der Zahl, welcher das Ding vorerst gegeben ist, auf dass es gezählt werden könne.«[139])

Wenn also in dem unendlich Kleinen der Grund aller Realität gefunden ist, was wird aus dem Kantischen Ding an sich? Cohen wendet sich da gegen jene »philosophierenden Menschen«, die darüber nachgrübeln, »ob Kant »affizierende Dinge« angenommen oder geleugnet habe«. Das Missverständnis ist lediglich durch den ungenauen Terminus *affizieren* herbeigeführt worden. Die sinnlichen Affektionen, die wir in Form von Raum, Zeit, Substanz, Kausalität erhalten, sind allerdings die unklären, diskreten Ansichten, die uns die durchaus inkompetente unselbständige Empfindung, deren Inhalt nur ein provisorischer ist, vom Gegenstande mitteilen. Der wahre Gegenstand, auf den jenes Korrelat der Empfindung allerdings berechtigten Anspruch hat, das ist der Gegenstand der mathematischen Naturwissenschaft, dieser ist das objektiv gültige Ding, und als solcher in Realität gegründet wird er in unserem intensiven Denkmittel durch das Integral zu stande gebracht.

Wird solcherweise das unendlich Kleine zum Ursprung aller realen Intensität gemacht, so erhebt sich die Frage, wie die Fülle von Qualitäten ihren zureichenden Grund in jener Quelle haben könnte. Hier liegt nach Cohen die logische Erklärung der höheren Ordnung des Infinitesimalen; »das *dx* ist keineswegs Null, sondern als Zahl zu denken«,[140]) seine Aufgabe besteht darin, die Zahl, die in antiker Auffassung lediglich als Grösse verstanden wurde, als Realität zu legitimieren. »Der Unterschied der Qualität ist als ein solcher der Realität und auf die verschiedenen Ordnungen des Unendlichkleinen zurückführbar zu denken.« Das Differential *dx* ist zwar an und für sich konstant, sofern es im Hinblick auf ein zu erzeugendes *x* als Einheit betrachtet wird; sofern also, deutlicher gesprochen, der Differentialquotient einen bestimmten zahlenmässigen Wert ergibt. Solange es indessen mit einem *x* behaftet ist, »ist dies ein An-

[138]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 144.
[139]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 145.
[140]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 146.

zeichen, dass die letztmögliche Realitätseinheit noch nicht erschöpft ist«, das will sagen, da x variabel, lässt sich dx noch nicht als Konstante betrachten.

Dieser Gedanke, dass das unendlich Kleine in sich den Grund aller Realität berge, zur Erzeugung des Gegenstandes führe und dem Denken zu seiner Reinheit, verhelfe, wird in Cohens *Logik der reinen Erkenntnis* zu einem umfassenden System ausgebaut: die Hypothesis des Unendlichen in der Erkenntnis ist das Leitmotiv dieser Logik; Denken ist Denken des Ursprungs. Die Aufgabe, das Prinzip der Infinitesimalmethode in die Logik einzuführen, wird von Cohen mit Energie in Angriff genommen; ist er doch von dem Gedanken durchdrungen, dass die Logik, sofern sie die Methode der mathematischen Naturwissenschaft und letzthin aller Wissenschaft sein will, »vorzugsweise die Logik des Prinzips der Infinitesimalrechnung sein« muss.

Man hatte bisher das Unendliche als das gewagteste Abstraktum vom gegebenen Objekt bezeichnet. Abstraktionen in diesem Sinne gibt es in Cohens System nicht mehr, denn die Empfindung verleiht dem Denken nicht den Stoff, dieser wird vielmehr im Strome des Urteils mit Hilfe der mannigfachen Kategorieen erzeugt. Nur ein Anspruch auf den erzeugten Gegenstand wird der Empfindung zugestanden, es bleibt ihr nur die Zustimmung zu den unfehlbaren Vorstössen des reinen Denkens, das seine Sicherheit seiner Abstammung aus dem Ursprunge verdankt.

Für Cohen ist der Ursprung indessen noch nicht völlig das mathematisch unendlich Kleine; der Ursprung steht jenseits alles noch so Kleinen, er nimmt überhaupt keinen bestimmten Ort ein, er ist nur eine Methode des Denkens, auf dem Umwege des Nichts das Etwas zu erzeugen. Indem so das Denken jede Gegegebenheit der Anschauung verschmäht, erzeugt es auf diesem Wege durch das Nichts aus eigener Machtvollkommenheit das Sein, es kann also niemals fehlgehen, wenn es sich dieses Urteils des Ursprungs bedient. Dieses Nichts, das Cohen hier im Auge hat, ist nicht etwa mit dem Unding *Nicht* zu verwechseln. »Es ist nur die sprachliche Form, welche durch die gleiche oder ähnliche Wortform den Irrtum nahelegt. Der Fall bildet daher auch ein lehrreiches Beispiel der Kollision der Sprache und der Logik.«[141]) Das Nichts war ein μὴ ὄν, es barg in seinen Abgründen einen hoffnungsvollen Keim, der im Strome des Urteils und an der Hand und in der Form von Kategorieen zur Entfaltung kam. Das Nichts steht wenigstens in Verbindung mit dem Gegenstande der reinen Erkenntnis, es ist das Zentrum einer gedanklichen Projektion, das Nicht dagegen ist dem Denken durchaus konträr, es ist der Feind, der die reinen Erkenntnisse vernichten würde, wenn nicht das Urteil des Widerspruches die aus dem Ursprung hervorgegangenen und durch Identität zusammengehaltenen Erzeugnisse schützte.

Das Urteil des Ursprungs führt im Gebiet der Mathematik zum Urteil der Realität, womit der grundlegende Wert der Mathematik des unend-

---

[141]) Vide Cohen: *System der Philosophie*, 1. Teil: *Logik der reinen Erkenntnis* (Berlin 1902), pag. 87.

lich Kleinen, der Infinitesimalanalysis, nachgewiesen ist. Das unendlich Kleine ist ein Beispiel des Urteils der Realität; so ist es der Keim der Zahl der mathematischen Naturwissenschaft. »Das Endliche, alles Endliche, soweit es in den Bereich der Mathematik fällt, soll in dieser neuen Zahl seinen zulänglichen Grund erlangen, und dieser Grund des Endlichen ist unendlich klein.«[142]) Das dx wird zum Ursprung des x. »Das Infinitesimale geht der Ausdehnung voraus und liegt ihr zu grunde.« Wenn Cohen meint, dass das Infinitesimale die erzeugende Richtung der Kurve bereits an sich trägt, wenn er es mit Realität behaftet, sofern er unter Realität die reine methodische Erzeugung des als Problem vorschwebenden Gegenstandes meint, so ist er dahin zu korrigieren, dass wir dabei den Differentialquotienten im Auge haben müssen. Denn nicht die Differentiale selber vertreten das Gesetz der Richtung, das tut nur ihr Verhältnis.

Das unendlich Kleine wird, da es der Grund aller Realität ist, der Ursprung des Seins. »Es gibt kein anderes Mittel, die Naturgesetze zu formulieren; nein, nicht allein zu formulieren, sondern kein anderes auch, sie zu begründen, den Grund für sie zu legen, als welches in dem Unendlichkleinen gesichert ist.«[143]) Der Wert des Infinitesimalbegriffes liegt für Cohen in seiner Unsinnlichkeit, und das Endliche muss in einem Unsinnlichen seinen Ursprung haben. Doch »immer ist die Korrelation zum Endlichen der Sinn und Zweck der ganzen Sache«;[144]) während also im dx der Ursprung des Endlichen nur definiert wird, wird er im Differentialquotienten bestimmbar, und aus dem selben Grunde liegt der Zweck der Infinitesimalrechnung in der Integralrechnung.[145]) Das Integral stabiliert im Urteil der Allheit jene wahrhafte Einheit, der die Mehrheit niemals gerecht werden konnte, deren Einheit vielmehr sich als Einzelheit entpuppt: »die Einzelheit ist als Einheit der Mehrheit erkannt und bewahrt«. Erst die Allheit des Integrals erzeugt die Einheit des Gegenstandes; diese Integralallheit ist nach Cohen nicht mehr mit der Allheit der unendlichen Reihe zu verwechseln, die lediglich den Zahlbegriff erweitert. Das Integral bringt etwas Neues, Unerhörtes; es ringt sich von der immerhin noch subjektiv erscheinenden diskreten Zahl los und zielt auf ein Aussen hin. Dieses Aussen, wohlgemerkt, ist nicht mit vom Denken unabhängigen Dingen zu verwechseln; das Denken erzeugt sich ja erst dieses Aussen. Das Integral führt zu einer neuen Kategorie, und diese Kategorie erkennen wir im Raume. Der Raum wird also von Cohen als Kategorie gefasst, nicht als eine psychologische Form unserer Sinne. Der Bezirk des reinen Denkens ist ein umfassender; wie die Einheit der Realität in ihm seinen Grund hatte, so gleicherweise die der Mehrheit.

---

[142]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 105.
[143]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 113.
[144]) Vide Cohen, loc. cit., pag. 156.
[145]) Wenn sich Cohen allerdings im Eifer der Untersuchung zu dem Ausspruch verleiten lässt, das Differential sei die Umkehrung des Integrals, so scheint uns dies mit seiner eigenen Auffassung nicht ganz überein zu stimmen.

Wenn wir die Unendlichkeit des Raumes als Aussen gefasst haben, so ist dies kein Aussen für das Denken, vielmehr ein Aussen gegenüber dem Antizipationsverfahren der Kategorie der Zeit, deren Zahlenkosmos erst der Allheit des Integrals gegenüber als Innengehalt erscheint.

Weshalb also unterscheidet sich die unendliche Reihe vom Integral so grundlegend? Das unendlich Kleine, wie das unendlich Grosse werden in dem Denkgesetz der Kontinuität verbunden. Diese innige Verwandtschaft zu symbolisieren, sucht die Algebra in den gewöhnlichen unendlichen Reihen vergebens; sie kann immer nur Endliches mit Unendlichem verbinden. Die »Verbindung des Infinitesimalen mit dem Unendlichen der Allheit« ist das Neue, das das Integral der Wissenschaft bringt. Der Begriff des aktual Unendlichen führt zur Kategorie des Raumes.

Zum Schluss dieser Betrachtungen sei eine Frage gestattet: Fehlt Cohen gegen das von Cantor aufgestellte und begründete Verbot der Einführung aktual unendlich kleiner Grössen? Ist das *dx* als Beispiel der Realität überhaupt für Cohen aktual unendlich?

Das *dx* ist ein Beispiel der Realität. Zur Realität leitet das Urteil des Ursprungs in der Mathematik hin; im Ursprung bleibt auch jetzt noch das infinitesimale Prinzip latent. Das Urteil des Ursprungs bedeutet aber einen Umweg, also einen Weg, der zurückgelegt werden muss, um zum Etwas zu gelangen, einen Prozess, wie überhaupt die Flüssigkeit des Urteils zur ersten Norm gemacht wird. Das Infinitesimale ist mithin etwas Unabgeschlossenes, das lediglich als unendlich kleine Zahl die Befugnis vertritt, zur endlichen Zahl hinzuleiten, die erst eigentlich als Zahl bezeichnet werden kann. Cohen spricht wohl von infinitesimalen Elementen, die durch Kontinuität verbunden sind. Dieser Begriff ist aber nicht wörtlich zu fassen; denn Erzeugung ist immer die Hauptsache, und das unendlich Kleine ist nur ein Beispiel des Ursprungs.

4 (Anhang)

Parallel mit der Entwickelung des Unendlichkeitsbegriffs in der Philosophie, die bei Cohen sich auf einem Höhegrad befindet, läuft, wie bereits mehrfach angedeutet, in der reinen Mathematik eine andere, in der sich die entgegengesetzte Tendenz verkörpert, und die auf den völligen Ausschluss des Unendlichen aus der Spekulation hinarbeitet. Die sogenannte strenge Schule der Mathematiker hat im abgelaufenen Jahrhundert die Prinzipien der Infinitesimalrechnung einer Revision unterzogen, und sie ist dahin gelangt, jeden Unendlichkeitsbegriff auszuscheiden und das Unendliche nur noch, um den früher bereits zitierten Ausspruch Gauss' zu wiederholen, als *façon de parler* gelten zu lassen. Das Bestreben ist auch insofern von Erfolg gekrönt worden, als sich alle Sätze der Infinitesimalrechnung ohne die Annahme unendlich kleiner Grössen in voller Strenge deduzieren liessen. Für den Mathematiker besagt jetzt der Ausdruck *unendlich kleine Grösse* nichts weiter als eine variable Grösse, deren Wert unter eine beliebige konstante Grösse sinken kann, die sich also der Null beliebig nähert, selber aber stets endlich bleibt. Dass diese

Methode für die Exaktheit und Sicherheit der mathematischen Forschung einen grossen Gewinn bedeutet, leuchtet ohne weiteres ein; eine andere Frage ist, ob sie das Unendlichkeitsproblem selber irgendwie tangiert.

Von seiten der Philosophen hat die strenge mathematische Schule Unterstützung in der in unseren Tagen neu erstandenen Friesschen Schule gefunden, die sich auch in bewusstem Gegensatz namentlich zu Cohen gestellt hat. So hat einer der Hauptvertreter dieser Schule, L. Nelson, in einer Besprechung des Cohenschen Hauptwerkes[146]) ihm den Vorwurf gemacht, dass er mit seiner Auffassung des unendlich Kleinen auf die »vorkritische Zeit der Wissenschaft« zurückgehe. »Die Arbeiten von Cauchy, Weierstrass und ihren Schülern haben einwandsfrei gezeigt, dass im gesamten Gebiet der Analysis dem sogenannten unendlich Kleinen eine mathematisch genau definierbare Bedeutung zukommt, und dass man es in ihr niemals mit wirklich existierenden unendlich kleinen Grössen in irgend einem mystischen Sinne zu tun hat«, während Cohen dem unendlich Kleinen »eine selbständige Bedeutung und Existenz zukommen« lasse.[147]) »Andere als endliche Grössen existieren in der Mathematik nicht, und die Unendlichkeit bedeutet in ihr nichts anderes, als die Unvollendbarkeit des Prozesses der Zusammensetzung oder der Teilung endlicher Grössen.« Diese Definition ist vollständig zutreffend und für die Strenge der mathematischen Operation hinreichend. Über den Unendlichkeitsbegriff selber aber wird nichts ausgesagt, soweit man nicht in der unbegrenzten Annäherung das Kennzeichen des potential Unendlichen erblicken soll, worauf schliesslich die Grenzmethode überhaupt hinausläuft.

Eine ausführliche Betrachtung über das Unendliche in der Mathematik im Sinne der Friesschen Schule hat G. Hessenberg angestellt. Dieser Autor klagt darüber, dass trotz der Bemühungen der strengen Schule »der mathematische Mystizismus noch heute unter den Mathematikern selbst zahlreiche Anhänger« findet.[148]) Die Mathematik hat die Versäumnis der ersten Zeit der Infinitesimalrechnung wieder gut gemacht,

---

[146]) Erschienen in den *Göttingschen gelehrten Anzeigen*, 1905, 8. Heft. — Die Freude über die Klarheit und Konsequenz, mit der der Rezensent seinen Standpunkt gegenüber Cohen verficht, wird leider erheblich gemindert durch die Form der Besprechung. Mag ein ironischer Ton sonst vielfach zur Belebung von trockenen Ausführungen beitragen, so ist er doch — das muss man bei aller Nichtanerkennung von Autoritäten und aller Achtung vor der freien Forschung betonen — einer wissenschaftlichen Persönlichkeit von der Art Cohens gegenüber ganz und gar unangebracht. Zumal er auch sachlich auf Abwege führt, weil er hindert, in die Absichten eines so bedeutenden Geistes wirklich einzudringen.

[147]) Dass dieser Vorwurf unzutreffend sei, darauf weist E. Cassirer in seiner Schrift *Der kritische Idealismus und die Philosophie des »gesunden Menschenverstandes«* (Giessen 1906), pag. 32, hin; er entgegnet Nelson, dass für Cohen »das Infinitesimale nicht als Ding, sondern als Bedingung, nicht als eine irgendwie vorhandene Wirklichkeit, sondern als ein gedankliches Instrument zur Entdeckung und zum Aufbau des wahrhaften Seins« gelte.

[148]) Vide Gerhard Hessenberg: *Das Unendliche in der Mathematik* in den *Abhandlungen der Friesschen Schule*, 1904, 1. Heft, pag. 137.

sie hat »das gefährlichste Baumaterial . . ., die als wirklich existierend angenommenen unmessbaren Grössen dx und ∞«[149]) aus ihrem Bezirk entfernt und »den Besitzstand mathematischen Wissens . . . mit elementaren Hilfsmitteln begründet«. Mit dem Limesbegriff sind »zugleich alle Sätze der unendlichen Reihen, Differentialrechnung und Integralrechnung des mystischen Zaubers entkleidet«.[150]) Freilich sind sie das. Aber damit ist der »mystische Zauber« selber noch nicht geschwunden; denn er lag nicht in den Reihen etc., sondern im Unendlichkeitsbegriff, und dieser wird nicht dadurch aufgehellt, dass er sich für eine Anzahl von Rechnungsoperationen als entbehrlich erweist. Dass das Unendliche sich auch nicht einmal für sämtliche mathematischen Disziplinen ohne weiteres bei seite schaffen lässt, zeigt das Cantorsche Transfinite. Hessenberg hilft sich hier durch eine Definition der Vergleichungsmethoden: »Wenn irgend eine Methode der Vergleichung zwei Dinge A und B sowohl verschieden, wie gleich erscheinen lässt, so nennt der Mathematiker diese Dinge hinsichtlich dieser Vergleichungsmethode unendlich. Ist die Vergleichungsmethode dagegen derart, dass »kleiner«, »gleich« und »grösser« sich ausschliessen, so nennt man die verglichenen Objekte hinsichtlich dieser Methode »endlich«.«[151]) Dadurch hat die begriffliche Schwierigkeit nur ihren Ort gewechselt, aber nicht aufgehört, zu existieren; sie liegt jetzt darin, dass »zwei Dinge A und B sowohl verschieden, wie gleich erscheinen«, und es bedeutet keinen Trost für uns, dass »bisher . . . die Mengenlehre das einzige Gebiet der Mathematik« ist, »in dem mit »unendlichen Vergleichungsmethoden« gearbeitet wird«.

Hessenberg nimmt die strenge Schule der Mathematiker gegen den »Vorwurf« in Schutz, dass sie das Unendlichkeitsproblem »leugne . . ., statt es zu lösen«. Man kann in der Tat nicht sagen, dass sie es leugne, aber ebenso wenig, dass sie es löse: sie scheidet es einfach aus ihrem Gebiet, überlässt es damit aber nur einem andern. Die Verdienste, die sich die strenge Schule um die Sicherheit und Unantastbarkeit des Gebäudes der Mathematik erworben hat, sind gar nicht hoch genug anzuschlagen. Das Erkenntnisproblem des Unendlichen konnte und wollte sie aber nicht lösen, und sie kann es daher nicht verhindern, dass man sich nach wie vor seinem »mystischen Zauber« hingibt, dass es neue Wege einschlägt und vielleicht wieder abwechselnd zu einem Maximum und zu einem Minimum kommt.

[149]) Vide Hessenberg, loc. cit., pag. 189.
[150]) Vide Hessenberg, loc. cit., pag. 152.
[151]) Vide Hessenberg, loc. cit., pag. 145.

Schlusswort

»Welches ist jene Sache, die es nicht gibt, und die, wenn es sie gäbe, nicht existierte? Es ist das Unendliche, welches, wenn es das geben könnte, begrenzt und endlich wäre, weil das, was es gibt, Grenzen hat in der Sache, die es an seinem Äussern umgibt, und was es eben nicht gibt, ist jene Sache, so keine Grenzen hat.« Ist dieser nachdenkliche Ausspruch des genialsten Menschen, den die anbrechende neue Zeit sah, Leonardos,[352]) der also dem aktual Unendlichen die Existenz bestritt, durch die wissenschaftliche Entwickelung der vier Jahrhunderte überholt? Der Widerstreit diametral entgegengesetzter Auffassungen, dem unser Begriff noch heute unterliegt, verbietet es uns, diese Frage zu bejahen.

Wir hatten, sowohl am Eingang der Untersuchung, wie mehrfach in deren Verlauf, darauf hingewiesen, dass wir keineswegs die fast unübersehbare Reihe der Denker aufzählen wollten, die das Gebiet des Unendlichkeitsproblems gestreift haben. Das Rätselhafte in dem Problem verlockte ganz besonders im rein spekulativ metaphysischen Denken zu einer solchen Fülle teils konträrer, teils völlig zusammenhangloser Theoreme, dass es ein müssiges Spiel bedeutete, dem bergauf und bergab gehenden Ziel und endlosen Entwickelungspfade des Unendlichkeitsbegriffes bis in seine geheimen Schächte und Abgründe nachzugehen. Nur das Wesentliche galt es heranzuholen, zu sondieren; aus diesem Wesentlichen da, wo es möglich war, an eine Rekonstruktion der Entwickelungskurve zu gehen; da, wo es aussichtslos war, an entweder durch Originalität oder durch Absurdität hervorstehenden Beispielen auf diese Unmöglichkeit hinzuweisen. Je enger die einzelnen wichtigen Fakta neben einander stehen, um so klarer tritt der Verlauf in der Wandlung hervor. Aus diesem Grunde sei an dieser Stelle noch einmal dem Gange unserer Untersuchung resümierend nachgeschritten.

Bei Kant finden wir das Unendliche auf den in unseren Gedanken sich vollziehenden Progressus *in infinitum* bezogen. Die Subjektivität dieser Auffassung bringt es mit sich, dass der Kantische Versuch der Antinomieenauflösung von seinen rein idealistischen Nachfolgern aufs bedenklichste überspannt wird. Zwar sind die Ansätze der Grössten unter diesen Epigonen derart gehalten, dass wir in ihnen bereits eine entschiedene Tendenz des Problems zu jener Entwickelungsstufe wahrnehmen können, mit deren Schilderung wir die Arbeit geschlossen haben: zu einer

[352]) Vide *Leonardo da Vinci, der Denker, Forscher und Poet*, nach den veröffentlichten Handschriften übersetzt und herausgegeben von Marie Herzfeld (Leipzig 1904), pag. 115.

systematischen Zugrundelegung des fraglichen Begriffs. Doch Unklarheit, Inkonsequenz und gewaltsame Zurückdrängung gegründeter Bedenken lassen wenig methodische Entwickelung und verständige Verarbeitung überkommener Ideen erkennen. Man fühlt sich fast versucht, Cantor beizustimmen: »Die Begriffsschwankungen und die damit zusammenhängende Verwirrung, welche seit ungefähr hundert Jahren zuerst vom fernen Osten Deutschlands her in die Philosophie hineingetragen wurden, zeigen sich nirgends deutlicher, als in den das Unendliche betreffenden Fragen, wie aus unzählig vielen, sei es kritizistisch oder positivistisch, psychologistisch oder philologistisch gehaltenen, Publikationen unserer heutigen philosophischen Literatur hervorgeht.«[153]) Die Kantischen Antinomieen konnten keinen systematischen Denker unberührt lassen, wenn auch die Stellungnahme der einzelnen Erkenntnistheoretiker ihnen gegenüber zuweilen seltsam anmutet. Daneben entwickelte sich von mathematisch vorgebildeter Seite aus die alte Streitfrage nach dem potential und dem aktual Unendlichen, die bald merkwürdige Ergebnisse zeitigte. Die Cantorschen Theorieen, die in dem bisher anscheinend jedem positiven Erkennen entrückten Unendlichen durchaus selbständige Eigenschaften entdeckten, scheinen ein Zeichen für die Selbständigkeit der reinen Erkenntnis, und die Errungenschaften der Mathematik in diesem jeder sinnlichen Wahrnehmung entzogenen Gebiet können auf die Dauer auch die spekulative Philosophie nicht unberührt lassen. Welchen Stoff derartige Ergebnisse einem orignellen Denker bieten können, zeigt Cohens System der reinen Erkenntnis, in dem das Infinitesimale durch das Gebiet des reinen Denkens zieht, nachdem es Cohen von dem Charakter einer Grenzmethode freizumachen versucht hat. Cohens Spekulation bedeutet gleicherweise eine Etappe in der Philosophie, wie die Mannigfaltigkeitslehre in der Mathematik. In beiden Gebieten sehen wir das kategorematisch Unendliche zu einem bisher noch nicht erreichten Höhepunkt gelangen, der, wie man sich auch zur Aktualität des Unendlichen selber stellen mag, zu einem fruchtbaren Ausgangspunkt einer Erkenntnis- und Zahlentheorie werden kann.

---

[153]) Vide Cantor: *Zur Lehre vom Transfiniten,* pag. 10.

Literaturverzeichnis

Bolzano: *Paradoxieen des Unendlichen*, 2. Aufl. (Berlin 1889).

Cantor: *Zur Lehre vom Transfiniten* (Halle 1890).

Der selbe: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Leipzig 1883).

Carriere: *Die sittliche Weltordnung* (Leipzig 1877).

Carus: *Metaphysik in Wissenschaft, Ethik und Religion* (Dresden 1881).

Cassirer: *Der kritische Idealismus und die Philosophie des »gesunden Menschenverstandes«* (Giessen 1906).

Chalybaeus: *Entwurf eines Systems der Wissenschaftslehre* (Kiel 1846).

Cohen: *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte* (Berlin 1883).

Der selbe: *System der Philosophie*, 1. Teil: *Logik der reinen Erkenntnis* (Berlin 1902).

Cohn: *Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant* (Leipzig 1896).

Czolbe: *Die Grenzen und der Ursprung der menschlichen Erkenntnis im Gegensatz zu Kant und Hegel* (Jena 1865).

Dreher: *Die Grundlagen der exakten Naturwissenschaft im Lichte der Kritik* (Dresden 1900).

Dühring (E.): *De tempore, spatio, causalitate atque de analysis infinitesimalis logica* (Berlin 1861).

Der selbe: *Natürliche Dialektik* (Berlin 1865).

Der selbe: *Logik und Wissenschaftstheorie* (Leipzig 1878).

Dühring (E. und U.): *Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis* (Leipzig 1884).

Engels: *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft*, 2. Aufl. (Zürich 1886).

Falckenberg: *Geschichte der neueren Philosophie*, 5. Aufl. (Leipzig 1905).

Der selbe: *Grundzüge der Philosophie des Nicolaus Cusanus* (Breslau 1880).

Fichte (J. G.): *Grundlage der gesamten Wissenschaftslehre*, 2. Aufl. (Tübingen 1802).

Der selbe: *Grundlage des Naturrechts nach Prinzipien der Wissenschaftslehre* (Jena 1796).

Fichte (I. H.): *Grundzüge zum Systeme der Philiosophie*, 3. Abt.: *Die spekulative Theologie* (Heidelberg 1846).

Der selbe: *Psychologie* (Leipzig 1864).

Fischer (Kuno): *Geschichte der neueren Philosophie* (Heidelberg 1897 bis 1903), 5. Bd.: *Kant*, 6. Bd.: *Fichte*.

Gauss: *Werke*, 8. Bd. (Göttingen 1900).

Gutberlet: *Das Unendliche, metaphysisch und mathematisch betrachtet* (Mainz 1878).

Der selbe: *Logik und Erkenntnistheorie* (Münster 1892).

Hagemann: *Elemente der Philosophie* (Münster 1870).
Hamerling: *Die Atomistik des Willens* (Hamburg 1890).
Hegel: *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften* (Heidelberg 1817).
Herbart: *Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie* (Königsberg 1837).
Kant: *Kritik der reinen Vernunft*, Reclam-Ausgabe (Leipzig o. J.).
Der selbe: *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*, Reclam-Ausgabe (Leipzig o. J.).
Lagrange: *Mathematische Werke* (Berlin 1823).
Lotze: *System der Philosophie*, 2. Bd.: *Metaphysik* (Leipzig 1879).
Meyer (J. B.): *Zum Streit über Leib und Seele* (Hamburg 1856).
Müller (Max): *Einleitung in die vergleichende Religionswissenschaft* (Strassburg 1874).
Der selbe: *Vorlesungen über den Ursprung und die Entwickelung der Religionen* (Strassburg 1880).
Odebrecht: *Hermann Cohens Philosophie der Mathematik* (Berlin 1906).
Rickert: *Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung* (Freiburg 1896).
Schelling: *System des transzendentalen Idealismus* (Tübingen 1801).
Schmitz-Dumont: *Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie* (Berlin 1878).
Sigwart: *Logik* (Freiburg 1893).
Tongiorgi: *Institutiones philosophicae*, 2. Bd. (Brüssel 1869).
Trendelenburg: *Logische Untersuchungen* (Leipzig 1862).
Ulrici: *Gott und die Natur* (Leipzig 1866).
Volkmann von Volkmar: *Lehrbuch der Psychologie*, 4. Ausg. (Cöthen 1894).
Wagner: *Mathematische Philosophie*, 2. Aufl. (Ulm 1851).
Waitz: *Lehrbuch de Psychologie als Naturwissenschaft* (Braunschweig 1849).
Wundt: *Logik*, 3. Aufl. (Stuttgart 1906).
Der selbe: *Essays* (Leipzig 1886).

Zeitschriften etc.

Abhandlungen der Friesschen Schule.
Acta mathematica.
Göttingische gelehrte Anzeigen.
Index lectionum Academiae Monasteriensis.
Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung.
Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Kantstudien.
Mathematische Annalen.
Revue Philosophique.
Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie.
Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik.

Lebens- und Bildungsgang

Verfasser, Joseph Bloch, preussischer Staatsangehöriger, jüdischer Religion, wurde am 14. September 1871 als Sohn des Kaufmanns Levin Bloch und seiner Gattin Deborah, geb. Urysohn, in Wilkowiszky geboren. Er besuchte in Königsberg i. Pr. das Kneiphöfische Gymnasium, verliess es Ostern 1890 mit dem Zeugnis der Reife, studierte dann vom Sommersemester 1890 bis zum Wintersemester 1891-1892 an der Universität Königsberg, vom Sommersemester 1892 bis zum Wintersemester 1896-1897 an der Universität Berlin Mathematik, Philosophie und Physik, lebte seitdem in Berlin, mit Erteilung von Unterricht, schriftstellerischen und redaktionellen Arbeiten und mit Privatstudien beschäftigt.

Während seiner Studienzeit hörte er die Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten Arons, Baumgart, Bezzenberger, du Bois-Reymond, Chun, Eberhard, Foerster, Frobenius, Fuchs, Gareis, Glau, Hasbach, von Helmholtz, Hensel, Hermann, Hettner, Hilbert, Hurwitz, Knoblauch, Koken, Koetter, Lindemann, Lossen, Meschede, Möbius, Pape, Paulsen, Peters, Pinner, Planck, Raths, Saalschütz, Samuel, Schlesinger, Schmoller, Schwarz, Sell, Simmel, Stumpf, Thiele, Umpfenbach, Volkmann, Wagner, Walter. Ihnen allen spricht er für alles, was sie ihm gegeben, seinen herzlichsten Dank aus.